Najděte všechny hodnoty parametrů pro než integrály konvergují a spočtěte je pro ně.

(1) $I(a) = \int_0^\pi \underbrace{\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}}_{f(a,x)}\,dx$.

Řešení: •) Zřejmě musí platit $1+a\cos x > 0$ pro s.v. $x \in (0,\pi)$. Pak ale nutně $a \in [-1,+1]$. Tudíž $I(a)$ má smysl uvažovat jen pro $|a| \le 1$.

•) Dále $\cos x = 0$ pro $x \in (0,\pi) \iff x = \pi/2$. Přitom platí
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+ay)}{y} = a.$$
Zde jsme použili větu o limitě složené funkce a položili $y=\cos x$. Přitom jsme využili toho, že $\cos x$ je klesající na $(0,\pi)$. Jestliže položíme $f(a,\pi/2) = a$, pak $f(a,x)$ je spojitá na $[-1,1]\times(0,\pi)$.

•) Pro $a\in(-1,1)$ platí $1+a\cos x > 0$ a tudíž $x \longmapsto f(a,x)$ je spojitá funkce na $[0,\pi]$. Pro $a\in(-1,1)$ tedy existuje dokonce Riemannův integrál
$$(R)\int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx,$$
tudíž existuje i Lebesgueův integrál a oba integrály se rovnají.
Pro $a=\pm 1$ máme rozhodnout zda existují i Lebesgueovy integrály
$$\int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,dx \quad \text{a} \quad \int_0^\pi \frac{\ln(1-\cos x)}{\cos x}\,dx.$$

Položme $1-\cos x = y$, $x\in(0,\pi)$. Pak $\sin x\,dx = dy$, $dx = \frac{dy}{\sin y} = \frac{dy}{\sqrt{1-(1-y)^2}} = \frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}}$
$$\int_0^\pi \frac{\ln(1-\cos x)}{\cos x}\,dx = \int_0^2 \frac{\ln y}{1-y}\frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}} =$$
$$= \int_0^2 \frac{\ln y}{1-y}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}}.$$

Jelikož $1-\cos x$ je rostoucí na $(0,\pi)$ a $(1-\cos x)' = \sin x > 0$, pak větu o substituci použít můžeme. Dále zvolme $0<\varepsilon<1$, pak
$$\int_0^2 \frac{\ln y}{1-y}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}} = \underbrace{\int_0^\varepsilon \frac{\ln y}{1-y}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}}}_{I_1} + \underbrace{\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} \frac{\ln y}{1-y}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}}}_{I_2} + \underbrace{\int_{2-\varepsilon}^2 \frac{\ln y}{1-y}\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}}}_{I_3}.$$

•) $\frac{\ln y}{\sqrt{y}}\frac{1}{(1-y)\sqrt{2-y}} \le \frac{K}{y^{2/3}}\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2-\varepsilon}}$ na $(0,\varepsilon)$,

neboť $\frac{y^{2/3}\ln y}{\sqrt{y}} = y^{2/3-1/2}\ln y = y^{1/6}\ln y \to 0$ pro $y\to 0^+$ a tudíž
$\exists\, K>0$ takové, že $\frac{y^{2/3}\ln y}{\sqrt{y}} \le K$ na $(0,\varepsilon)$. Tedy I_1 konverguje.

•) $\frac{\ln y}{(1-y)}\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}}$ je spojitá na $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$ (po dodefinování -1 v 1) a I_2 konverguje.

•) $\left|\frac{1}{\sqrt{2-y}}\frac{\ln y}{\sqrt{y}(1-y)}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2-y}}\cdot\frac{\ln 2}{\sqrt{2-\varepsilon}\,(1-\varepsilon)}$ na $(2-\varepsilon,2)$. Jelikož $\int_{2-\varepsilon}^2 \frac{dy}{\sqrt{2-y}} = -\int_\varepsilon^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^\varepsilon \frac{du}{\sqrt{u}} < +\infty$,
$2-y=u$, $dy=-du$

pak I_3 konverguje.

Ukázali jsme, že $\int_0^\pi \frac{\ln(1-\cos x)}{\cos x}\,dx$ je konečný! Dále

$$\int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,dx = -\int_2^0 \frac{\ln y}{(y-1)}\frac{dy}{\sin x} = \int_0^2 \frac{\ln y}{(y-1)}\frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}} = -\int_0^2 \frac{\ln y}{(1-y)}\frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}}.$$

$1+\cos x = y \qquad -\sin x\,dx = dy \qquad \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{2y-y^2}$

Tudíž i $\int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,dx$ konvergují. To znamená, že $I(a)$ je definovaná pro $a \in [-1,1]$.

•) Zkusíme použít větu o záměně derivace a integrálu. Máme $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{1+a\cos x}$. Vidíme, že

(DI1) $(0,\pi) \ni x \mapsto f(a,x)$ je spojitá a tudíž měřitelná pro $\forall a \in [-1,+1]$.

(DI2) $\frac{\partial f}{\partial a}$ je vlastní pro všechna $x \in (0,\pi)$ a $a \in [-1,+1]$.

(DI4) $I(0) = \int_0^\pi \frac{\ln(1+0.\cos x)}{\cos x}\,dx = \int_0^\pi 0\,dx = 0 \Rightarrow f(0,x) \in L(0,\pi)$.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu k $\frac{\partial f}{\partial a}$. Funkce $\frac{1}{1+a\cos x}$ je spojitá na $[-a_0,a_0]\times[0,\pi]$ a pro $|a| \le a_0 < 1$ platí odhad

$$|1+a\cos x| \geq \big||1|-|a\cos x|\big| = |1-|a|| = 1-|a| \geq 1-a_0 > 0$$

pro každé $x \in [0,\pi]$.

Tudíž $\frac{1}{|1+a\cos x|} \le \frac{1}{1-a_0} = g(x)$ je integrovatelná majoranta k $\frac{\partial f}{\partial a}$ na $[-a_0,a_0]$. Na druhou stranu

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} = \int_0^\pi \frac{dx}{2\cos^2 x/2} = \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]_0^\pi = +\infty \text{ a}$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x} = \int_0^\pi \frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = -\left[\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right]_0^\pi = +\infty.$$

Odtud vidíme, že $\frac{\partial f}{\partial a}$ NEMÁ integrovatelnou majorantu na $[-1,+1]$. Jelikož ale $a_0<1$ je libovolné, pak větu o záměně derivace a integrálu můžeme použít na $(-1,1)$. (Podrobnější zdůvodnění bylo na cvičení!)

•) Pro $a \in (-1,1)$ tedy máme

$$\frac{dI}{da}(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2dy}{1+y^2}\,\frac{1}{1+a\frac{1-y^2}{1+y^2}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2+a-ay^2}$$

$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad dx = \frac{2dy}{1+y^2}$

na $(0,\pi)$ je tato substituce ok

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+a)+(1-a)y^2}$$

$$= \frac{2}{1+a}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+\frac{1-a}{1+a}y^2} = \left|\frac{1-a}{1+a}>0\right| = \frac{2}{1+a}\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left[\operatorname{arctg}(+\infty) - 0\right] = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

•) Máme, že $I'(a) = \frac{dI}{da}(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. Pak z $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ plyne

$I(a) = \pi\arcsin a + C, \quad 0 = I(0) = C \Rightarrow \quad I(a) = \pi \arcsin a.$

•) Zatím víme, že $I(a) = \pi \arcsin(a)$ platí jen pro $a \in (-1,1)$. Přitom ale $I(a)$ je definována i pro $a = \pm 1$. Zbývá tedy rozhodnout, zda $I(\pm 1) = \pi \arcsin(\pm 1)$, tj. I je spojitá na $[-1,+1]$.

Zkusíme použít větu o záměně limity a integrálu.

Již víme, že:

(LI1) pro $\forall a \in [-1,1]$ je $(0,\pi) \ni x \longmapsto f(a,x)$ spojitá a tedy měřitelná.

(LI2) pro $\forall$ s.v. $x \in (0,\pi)$ je $[-1,1] \ni a \longmapsto f(a,x)$ spojitá.

Zbývá tedy najít integrovatelnou majorantu k f na $[-1,1]$.

Již víme, že $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{1+a\cos x} > 0$ pro $\forall a \in [-1,1]$ a $x \in (0,\pi)$.

Tudíž $[-1,1] \ni a \longmapsto f(a,x)$ je rostoucí pro pevné $x \in (0,\pi)$ a spojitá.

Pak ale
$$g(x) = \sup_{a \in [-1,1]} |f(a,x)| = \max \{ |f(-1,x)|, |f(1,x)| \}$$
$$= \max \Big\{ \Big| \underbrace{\frac{\ln(1-\cos x)}{\cos x}}_{g_1} \Big|, \Big| \underbrace{\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}}_{g_2} \Big| \Big\}.$$

Již víme, že $|g_1|$ a $|g_2|$ patří do $L(0,\pi)$. Pak tam ale patří i $g = \max\{|g_1|, |g_2|\}$. Tedy g je hledaná integrovatelná majoranta k $f(a,x)$ na $[-1,1]$. Platí tedy i třetí předpoklad věty o záměně limity a integrálu. Tudíž I je spojitá na $[-1,+1]$.

Závěr: $I(a) = \arcsin(a)$, $a \in [-1,1]$.

(Ti chytřejší než já použili místo věty o záměně limity a integrálu Leviho větu pro záměnu limity a integrálu.)

② $I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$, $a,b \in \mathbb{R}$.

Řešení: •) $F(a,b,x) := \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ pro $x \in (0,1)$; $a,b \in \mathbb{R}$.

•) F je spojitá na $\mathbb{R}^2 \times (0,1)$, tedy měřitelná na tomto množině.

•) Konvergence integrálu. Zřejmě $I(a,a) = 0$. Dále nechť $a \neq b$.

(i) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^b - x^a}{\ln x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{b x^{b-1} - a x^{a-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^-} bx - ax = b-a$

l'Hospitalovo pravidlo, jedná se o typ limity "$\frac{0}{0}$"

Funkce $F(a,b,x)$ je tedy omezená pro $\forall a,b \in \mathbb{R}$ na $(\varepsilon, 1)$ pro $\varepsilon > 0$

a tudíž $\int_\varepsilon^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$ konverguje pro $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

(ii) Pro $0 < x < e^{-1}$ platí $\ln x < \ln \frac{1}{e} = -\ln e = -1$. Tudíž $|\ln x| > 1$ a $\left|\frac{1}{\ln x}\right| < 1$. Pro $x \in (0, e^{-1})$ tedy platí, že $\left|\frac{x^a}{\ln x}\right| < x^a$. Víme, že $0 < \int_0^1 x^a\,dx < +\infty \iff a > -1$.

Tedy $I(a,b) = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx$ konverguje pro $a, b > -1$.

(iii) Nechť nyní $a \leq -1$ nebo $b \leq -1$ a $b \neq a$. Předpokládejme $a < b$. Pak nutně $a \leq -1$. Položme $s = \min\left\{\frac{a+b}{2}, \frac{a-1}{2}\right\}$. Potom $a < s < b$ a $s \leq -1$. Jestliže ukážeme, že existuje $0 < \delta < 1$ tak, že
$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} \geq x^s \quad \text{na } (0,\delta), \text{ pak}$$
$$\int_0^\delta \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx \geq \int_0^\delta x^s\,dx = +\infty \quad \text{a jsme hotovi.}$$

Máme
$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} \geq x^s \iff \frac{x^b - x^a}{x^s} \leq \ln x \quad \Big|\, \ln x < 0 \,\Big|$$
$$\iff x^{b-s} - x^{a-s} \leq \ln x \iff x^{b-s} - \ln x \leq x^{a-s}.$$
$$\iff (*) \quad (x^{b-s} - \ln x)\, x^{\frac{s-a}{2}} \leq x^{\frac{a-s}{2}}.$$

Platí $b - s > 0$, $s - a > 0$. Tudíž $\lim_{x\to 0+} x^{b-s} \cdot x^{\frac{s-a}{2}} = 0$ a
$$\lim_{x\to 0+} -\ln x \cdot x^{\frac{s-a}{2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\ln x}{x^{\frac{a-s}{2}}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{a-s}{2}\, x^{\frac{a-s}{2}-1}} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-1}{\frac{a-s}{2}\, x^{\frac{a-s}{2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{s-a}{2}}}{\frac{s-a}{2}} = 0. \quad \Big| \text{ l'Hospitalovo pravidlo pro } \text{"}\tfrac{+\infty}{+\infty}\text{"}$$

Vidíme, že levá strana $(*)$ má limitu 0 pro $x \to 0+$ zatímco $x^{\frac{a-s}{2}} \to +\infty$ pro $x \to 0^+$. Tudíž musí existovat $\delta > 0$ tak, že $(*)$ platí na $(0,\delta)$.

Pokud $b < a$, pak analogickým postupem dostaneme
$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} \leq -x^s, \text{ kde } s = \min\left\{\frac{b+a}{2}, \frac{b-1}{2}\right\}. \text{ Pak ale}$$
$$\int_0^\delta \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx \leq -\int_0^\delta x^s\,dx = -\infty.$$

Závěr: $I(a,b)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a,b>-1$ nebo $a=b$. Přitom $I(a,a)=0$.

•) Zbývá integrál spočíst.

1. postup. Použijeme větu o záměně derivace a integrálu. Zvolme $b>-1$ pevné a položme

$$I_b(a) = I(a,b) = \int_0^1 \underbrace{\frac{x^b - x^a}{\ln x}}_{f_b(a,x)}\, dx.$$

Platí $\frac{\partial f_b}{\partial a} = -x^a$. Dále

(DI1) $(0,1)\ni x \mapsto f_b(a,x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ je spojitá pro každé $a>-1$ a je tedy i měřitelná.

(DI2) $\frac{\partial f_b}{\partial a}$ je konečná (resp. vlastní) na $(0,1)$ pro každé $a>-1$.

(DI4) $f_b(b,x) = \frac{x^b - x^b}{\ln x} = 0 \in L(0,1)$.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu k $\frac{\partial f_b}{\partial a}$. Takovou majorantu nenajdeme na celém $(-1,+\infty)$. Nicméně pokud se omezíme na $[a_0,+\infty)$, kde $a_0>-1$, pak pro $-1<a_0\le a$ platí

$$g(x) = x^{a_0} = e^{a_0 \ln x} \geq |e^{a\ln x}| = x^a \quad (\ln x < 0).$$

Funkce g je tedy integrovatelná majoranta k $\frac{\partial f_b}{\partial a}$ na $[a_0,+\infty)$.

Tudíž $I_b'(a) = \int_0^1 \frac{\partial f_b}{\partial a}(a,b)\, da = -\int_0^1 x^a\, da = -\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{a+1}$ pokud $a\geq a_0$.

Jelikož ale $a_0>-1$ je libovolné, pak $I_b'(a) = -\frac{1}{a+1}$ na $(-1,+\infty)$.

Analogickým postupem získáme $I_a'(b) = \frac{1}{b+1}$, kde $I_a(b) = I(a,b)$ pro $a>-1$ pevné.

Tudíž

$$\begin{aligned} I(a_0,b_0) - I(0,0) &= I(a_0,b_0) - I(a_0,0) + I(a_0,0) - I(0,0) \\ &= \int_0^{b_0} \frac{\partial f_a}{\partial b}\, db + \int_0^{a_0} \frac{\partial f_0}{\partial a}\, da \\ &= \int_0^{b_0} \frac{db}{b+1} - \int_0^{a_0} \frac{1}{a+1}\, da \\ &= \ln(b_0+1) - \ln(a_0+1) = \ln\left(\frac{b_0+1}{a_0+1}\right). \end{aligned}$$

Jelikož $I(0,0)=0$, pak $I(a,b) = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$ pro $a,b>-1$.

2. postup. Použijeme Fubiniho větu. Předpokládejme $a<b$ (jinak přeznačíme a,b)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \int_0^1 \frac{[x^y]_a^b}{\ln x}\, dx = \int_0^1 \left[\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} x^y\right)\right] \frac{1}{\ln x}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\, dy\right) dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1\int_a^b x^y\, dy\, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b\int_0^1 x^y\, dx\, dy$$

| $x^y = e^{y\ln x} > 0$ pro $x\in(0,1)$, tudíž $x^y \in L^*((0,1)\times[a,b])$ a můžeme použít Fubiniho větu |

$$\underset{\text{my víme, že } y>-1}{=} \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\, dy = \ln|b+1| - \ln|a+1| = \ln\frac{b+1}{a+1},$$

protože $b+1, a+1>0$.