

Jméno a příjmení: _____

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

- [8] 1.
- Zdefinujte funkci $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a ukažte, že definice je smysluplná. Teorii, kterou k argumentaci použijete, uveďte (bez důkazů).
 - Dokažte, že platí $(\exp z)' = \exp z$. Zde uveďte definici derivace komplexní funkce komplexní proměnné a zformulujte přesně tvrzení, které k důkazu potřebujete.
 - Dokažte, že platí $\exp(z + w) = \exp z \exp w$ pro libovolné $z, w \in \mathbb{C}$. Stačí vysvětlit hlavní kroky důkazu.
 - Jak z výše uvedeného plyne, že $\exp$ zúžená na reálnou osu je nezáporná (respektive kladná) funkce jedné reálné proměnné?

Odpověď by měla obsahovat definici $\exp$ pomocí mocninné řady. Mocninným řadám lze přiřadit poloměr konvergence (jak?), který pro exponenciálu vyjde $+\infty$ (ukázat). Proto je $\exp$ definována všude v $\mathbb{C}$. Navíc uvnitř konvergenčního kruhu konverguje mocninná řada absolutně. Lze tedy aplikovat větu o derivování mocninných řad (uvést znění) a větu o Cauchyově součinu řad (uvést znění), které dávají vzorečky v zadání (jak?). Protože pro $x \in \mathbb{R}$ platí: $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = (\exp(\frac{x}{2}))^2$ je $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nezáporná, a protože je $\exp 0 = 1$ tak je nutně $\exp$ všude nenulová (ukázat jak sporem).

[8] 2. Matematickými symboly запиšte objekt *homogenní skalární lineární obyčejná diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními reálnými koeficienty*.

- Pro tuto rovnici zformulujte počáteční úlohu. Zadefinujte pojem maximálního řešení takto zavedené počáteční úlohy.
- Co lze říci o existenci a dalších kvalitativních vlastnostech (jako jsou jednoznačnost, hladkost) maximálního řešení této úlohy?
- Zformulujte tvrzení, které dává odpověď na předchozí otázku, a uveďte hlavní myšlenky (kroky) důkazu tohoto tvrzení.

Odpověď by měla obsahovat krom zápisu rovnice a počáteční úlohy informaci, že řešení pro libovolná počáteční data existuje na celé reálné ose, je jediné a je $C^\infty(\mathbb{R})$. Myšlenky důkazu by měly zahrnovat: (i) převod rovnice n -tého řádu na systém rovnic prvního řádu; (ii) aplikaci Picard-Lindelöfovy věty a ověření předpokladů; a (iii) argumentaci, proč lze lokální řešení prodlužovat až na celou reálnou osu. Skutečnost, že řešení je C^∞ -hladké plyne například z tvaru obecného řešení pro tento typ rovnic, tzn. z hladkosti prvků fundamentálního systému (báze).

- [8] 3. (1) Zdefinujte pojem parciální derivace prvního a druhého řádu pro skalární funkci f více proměnných.
- (2) Zformulujte větu, která zaručuje záměnnost druhých parciálních derivací. Uveďte hlavní myšlenky důkazu.
- (3) Jak tato věta souvisí s nutnými (a někdy i postačujícími) podmínkami na existenci potenciálu U k danému vektorovému poli $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_d)$. Tvzení, týkající se nutných podmínek, přesně zformulujte a dokažte.

Odpověď je jednoduchá, pokud student zná všechny požadované pojmy a tvrzení (některé byly odpředneseny až v posledním týdnu).