Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	10	10	10	36
Získáno					

[6] 1. Budiž dána funkce

$$f(z) = \frac{\cos z}{(2z-1)^2}.$$

V bodě $z_0 = \frac{1}{2}$:

a) určete typ singularity,

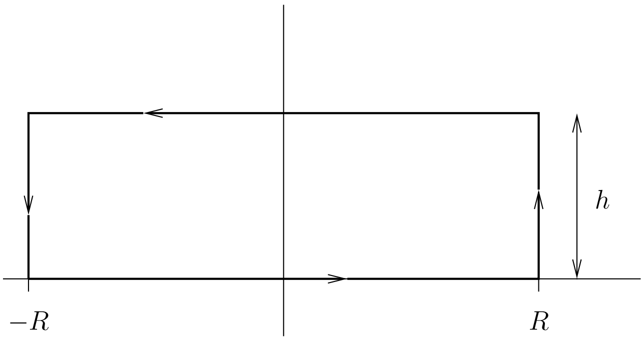
b) najděte Laurentovu řadu funkce $f(z)$,

c) spočtěte reziduum.

[10] 2. Pro $a \in \mathbb{R}$ uvažujte integrál

$$I = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Pro která $a \in \mathbb{R}$ integrál existuje a je konečný? Pro tato a integrál spočtěte. K výpočtu použijte integrační křivku naznačenou na Obrázku 1 a limitní přechod $R \to +\infty$. Je nutné zvolit vhodnou hodnotu parametru h!



Obrázek 1: Integrační křivka pro výpočet $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\,\mathrm{d}x$.

[10] 3. Distribuce $T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je definována předpisem

$$\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle =_{\mathrm{def}} \mathrm{p.\,v.} \int_{x\in\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x =_{\mathrm{def}} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{x=-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{x=\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right). \tag{1}$$

Zaveďme nyní distribuci $S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, která je definovaná jako

$$\left\langle S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \varphi \right\rangle =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\varphi(-x) - 2\varphi(0) + \varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(Povšimněte si mezí v integrálu.)

a) Ukažte, že definicí (2) je skutečně zavedena distribuce (korektnost definice, linearita, spojitost).

b) Dále ukažte, že definice (2) definuje stejnou distribuci jako definice (1), aneb ukažte, že platí

$$S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} = T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \tag{3}$$

kde rovnost chápeme jako rovnost dvou distribucí v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

c) Ukažte, že posloupnost funkci $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| \geq \frac{1}{n}, \\ -n^2, & |x| < \frac{1}{n}, \end{cases} \tag{4}$$

konverguje ve smyslu distribucí k distribuci $T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$ neboli $S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$, aneb ukažte, že platí

$$T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}, \tag{5}$$

kde T_{f_n} jsou regulární distribuce přiřazené standardní způsobem k funkcím f_n. Protože jste v předchozím bodě ukázali, že platí $S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}} = T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$, můžete samozřejmě dokazovat, že

$$T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}. \tag{6}$$

Vyberte si reprezentaci, ve které je důkaz pohodlnější/snažší.

d) Určete řád distribuce $T_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$ neboli $S_{\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x^2}}$.

[10] 4. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte na prostoru regulárních distribucí rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 6f = a\delta(x-0),$$

kde $\delta\,(x-y)$ značí Diracovu distribuci v bodě y a $a \in \mathbb{R}^+$ je parametr, a kde vyžadujeme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.