NOFY151, ZS 2019-2020 — Teoretická část zkouškové písemné práce — 16. ledna 2020

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1.
- Zformulujte a dokažte nutnou podmínku existence extrému funkce, která má derivaci v každém vnitřním bodě definičního oboru.
- Zformulujte Rolleovu větu.
- Uvažujte funkci $f(x) := 1 - \sqrt[5]{x^4}$ na $\langle -1, 1\rangle$. Rozhodněte a podrobně odůvodněte, zda lze Rolleovu větu na f aplikovat. Nakreslete obrázek charakterizující situaci.
- Rolleovu větu dokažte.

Řešení

- Buď $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ taková, že má v $x_0\in(a,b)$ extrém a $f'(x_0)$ existuje. Pak (nutně) $f'(x_0)=0$.

Důkaz ① Dle Axiomu o uspořádání může nastat právě jeden z případů: $f'(x_0)=0$ nebo $f'(x_0)>0$ nebo $f'(x_0)<0$. Když $f'(x_0)>0$, pak dle vlastnosti nenulové limity $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, což implikuje $f(x)>f(x_0)$ pro $x\in P^+_\delta(x_0)$ a $f(x)<f(x_0)$ pro $x\in P^-_\delta(x_0)$, což dává spor s existencí extrému v x_0. Podobně pro $f'(x_0)<0$.

2. důkaz BÚNO: nechť x_0 je lokální maximum. Pak $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $f(x)\geq f(x_0)$ pro $\forall x\in P_\delta(x_0)$ a pak

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \quad \forall x\in P^+_\delta(x_0) \quad \text{a} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \quad \forall x\in P^-_\delta(x_0)$$

Přechodem $x\to x_0+$ a $x\to x_0-$ dostáváme

$$f'(x_0+)\geq 0 \quad \text{a} \quad f'(x_0-)\leq 0$$

Ale $f'(x_0)$ existuje a tak $f'(x_0)=f'(x_0+)=f'(x_0-)=0$.

- **Rolleova věta** Buď $f\in C(\langle a,b\rangle)$, $f(a)=f(b)$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x\in(a,b)$. Pak $\exists\, \xi\in(a,b): f'(\xi)=0$.

- Dk
  - $f\equiv$ const. $\Rightarrow$ volme $\xi\in(a,b)$ libovolné.
  - Pokud f není konstantní, pak $\exists\, x_0\in(a,b)$ tak, že buď $f(x_0)>f(a)$ nebo $f(x_0)<f(a)$. Nastane-li první varianta, pak $\exists\, \xi\in(a,b)$ tak, že $\forall x\in(a,b)$ $f(x)\leq f(\xi)$ (tedy $f(\xi)\geq f(x_0)$). Protože $f'(\xi)$ existuje tak dle Věty výše $f'(\xi)=0$.
  - Nastane-li druhá varianta, postupujeme podobně. ∎ ./.

- $\boxed{f(x) = 1 - x^{\frac{4}{5}} \text{ na } \langle -1,1\rangle}$

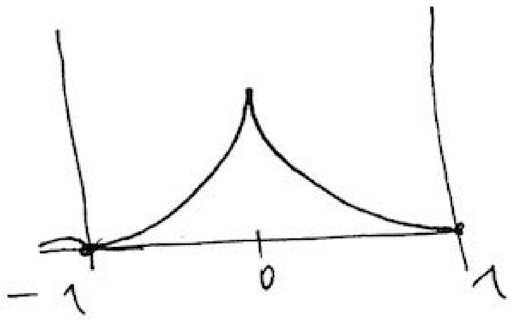
- $f(-1) = f(1) = 0$, f sudá, $f > 0$ v $(-1,1)$, $f \in C(\langle -1,1\rangle)$
- $f'(x) = -\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ existuje $\forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$
- $\lim\limits_{x \to 0\pm} f'(x) = \mp\infty$

$f'(0)$ neexistuje

$f'' > 0$

Rolleovu větu aplikovat nelze!

Náčrtek:



[8] 2.
- Zadefinujte pojem primitivní funkce F k dané funkci $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
- Zformulujte přesně obě věty o substituci pro nalezení primitivní funkce.
- Věty dokažte.

• Definice $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ je P.F. k f na (a,b) $\overset{df.}{\equiv}$ $\forall x \in (a,b) : F'(x) = f(x)$

• První věta o substituci

Nechť (i) F je prim. fce k f na (a,b)

(ii) $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ a $\varphi'(t)$ existuje pro $\forall t \in (\alpha,\beta)$

Pak $F \circ \varphi$ je prim. fce k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na (α,β).

Dk Derivováním a využitím věty o derivování složeného zobrazení:

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) \underset{\text{předp.}}{=} f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall t \in (\alpha,\beta),$$ c.b.d. $\boxtimes$

• Druhá věta o substituci

Nechť (i) Φ je prim. fce k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na (α,β)

(ii) $\varphi : (\alpha,\beta) \xrightarrow{na} (a,b)$ prostá a $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in (\alpha,\beta)$

Pak $\Phi \circ \varphi^{-1}$ je prim. fce k f na (a,b).

Dk Přímým derivováním a využitím vět o derivování složené fce a derivování inverzní fce. Máme

$$(\Phi \circ \varphi^{-1})'(x) = \Phi'(\varphi^{-1}(x))\,(\varphi^{-1})'(x) \underset{\text{předpoklad na } \Phi}{=} f(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{=x})\,\varphi'(\varphi^{-1}(x))\,\frac{1}{\underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}_{\neq 0}} = f(x). \quad \boxtimes$$

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$$

[8] 3. Nechť je reálná funkce f definována na $\mathbb{R}$ a nechť je omezená na $(-1,1)$. Zadefinujte, že f je omezená na $(-1,1)$. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. buď výrok dokažte, nebo uveďte protipříklad):

1. funkce f je spojitá alespoň v jednom bodě intervalu $(-1,1)$;
2. funkce f je omezená v intervalu $\langle -1,1)$;
3. funkce $g_1(x) := xf(x)$ je spojitá v bodě 0;
4. funkce $g_1(x) := xf(x)$ je diferencovatelná v bodě 0 (tzn. existuje $g_1'(0)$);
5. funkce $g_2(x) := x^2 f(x)$ je diferencovatelná v bodě 0 (tzn. existuje $g_2'(0)$);
6. funkce $g_3(x) := \sqrt[3]{x}\,\mathrm{sgn}\,x\, f(x)$ má limitu pro $x \to 0$;
7. funkce $g_4(x) := \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ má limitu pro $x \to +\infty$.

Řešení

0) • f je omezená na $(-1,1)$ $\overset{df.}{=}$ $\exists K>0\ \forall x \in (-1,1)\ |f(x)| \le K$

Ad 1) NEPLATÍ. Stačí uvážit Dirichletovu fci $D(x) = \begin{cases} 0 & \text{v } \mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ 1 & \text{v } \mathbb{Q} \end{cases}$

Ad 2) PLATÍ (Dk) Vezmeme $\max\{K, |f(-1)|, |f(1)|\} =: M$. Pak $\forall x \in \langle -1,1\rangle\ |f(x)| \le M$ což znamená, že f je omezená na $\langle -1,1\rangle$.

Ad 3) PLATÍ neboť

$$|g_1(x) - \underset{=0}{g_1(0)}| \le |x||f(x)| \le K|x|$$ což implikuje:

K danému libovolnému $\varepsilon > 0$ najdu $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$ a pak pro $\forall |x| < \delta$ platí $|g_1(x)| = |g_1(x) - g_1(0)| < \varepsilon$

Ad 4) NEPLATÍ neboť dle definice

$$\lim_{x\to 0} \frac{xf(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} f(x)$$ a je-li např. $f(x) = \mathrm{sgn}\,x$ pak limita neexistuje.

Ad 5) PLATÍ neboť opět dle definice

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x f(x)$$ existuje a je rovna 0 viz 3)

Ad 6) PLATÍ neboť $0 \le |g_3(x)| < K|x|^{1/3}$

a s použitím sendvičové věty dostávám tvrzení.

Ad 7) NEPLATÍ uvaž $f(x) = x^2$, která je omezená na $(-1,1)$

ale $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ neexistuje vlastní

• $f(x) = x^2 \sin x$ je další možnost

Příklad 5

$\boxed{\text{Řešení}}$ Průběh funkce $f(x) = \ln(1-|x-x^2|)$

[1] $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ |x-x^2| < 1\}$

- Je-li $x(1-x) > 0$ (tzn. $x \in (0,1)$), pak $x - x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$
$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

$\boxed{\langle 0,1\rangle \subset D_f}$ $\Leftarrow$ což platí vždy

- Je-li $x(1-x) < 0$ (tzn. $x \in \mathbb{R} \setminus \langle 0,1\rangle$) pak $-x(1-x) < 1$
$\Updownarrow$ $x^2 - x - 1 < 0$
$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\Updownarrow$ $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \setminus \langle 0,1\rangle$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.6$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6$

Tedy $D_f = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$22 \times 22 = 44$
44
484

- $f(0) = f(1) = \ln 1 = 0$
- $R_f \subset (-\infty, 0\rangle$, $f \in C(D_f)$
- $\lim\limits_{x \to \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\mp} f(x) = -\infty$ neboť $1 - |x-x^2| \to 0+$

[2] $$f'(x) = \frac{-1}{1-|x-x^2|}\,\mathrm{sgn}(x-x^2)(1-2x) = \begin{cases} \dfrac{-(1-2x)}{1-|x-x^2|} & \text{na } (0,1) \\[2ex] \dfrac{(1-2x)}{1-|x-x^2|} & \text{v } D_f \setminus \langle 0,1\rangle. \end{cases}$$

Odtud pro $x \in (0,\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ f je klesající na $(0,\frac{1}{2})$
rostoucí na $(\frac{1}{2},1)$
rostoucí na $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$
klesající na $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

- v $x = \frac{1}{2}$ lokál minimum
- v $x = 0$ a $x = 1$ globální maxima; globální minimum f není
- $R_f = (-\infty, 0\rangle$

Protože f spojitá v 0 a 1, tak platí:

$f'(0\pm) = \lim\limits_{x\to 0\pm} f'(x) = \mp 1$ a $f'(1\pm) = \lim\limits_{x \to 1\pm} f'(x) = \pm 1$:)

Také

$\lim\limits_{x \to \frac{1-\sqrt{5}}{2}+} f'(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}-} f'(x) = -\infty$

Asymptoty jsou přímky $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

[3] $$f''(x)\Big|_{(0,1)} = \frac{1}{(1-x+x^2)^2}\Big(\underbrace{\underbrace{2(1-x+x^2)-(2x-1)^2}_{2-2x+2x^2-4x^2+4x-1}}_{-2x^2+2x+1}\Big) = -\frac{2x^2-2x-1}{(1-x+x^2)^2}\Big|_{(0,1)} > 0 \text{ na } (0,1)$$

$-(2x^2-2x-1)$ kořeny $x_{1,2} = \frac{+2\pm\sqrt{8}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

neleží v $(0,1)$

f je konvexní na $(0,1)$

$$f''(x)\Big|_{D_f \setminus \langle 0,1\rangle} = \frac{1}{(1+x-x^2)^2}\left(-2(1+x-x^2) + (1-2x)(2x-1)\right)$$

$$= \frac{-1}{(1+x-x^2)^2}\left(2+2x-2x^2+4x^2-4x+1\right)$$

$$= \frac{-(2x^2-2x+3)}{(1+x-x^2)^2} < 0 \text{ vždy}$$

$\sqrt{4-24}$

f je konkávní v $D_f \setminus \langle 0,1\rangle$

[4] Graf