15.8. Analytické prodloužení, Gamma funkce a Riemannova zeta fce

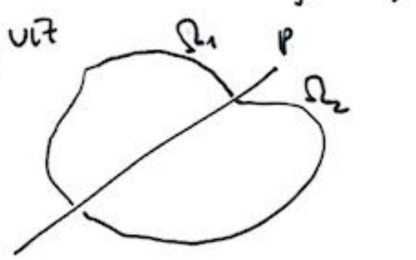
Analytické prodloužení je úloha najít k dané funkci $f \in H(\Omega)$ a množině $\tilde{\Omega} \supsetneq \Omega$ funkci $\tilde{f} \in H(\tilde{\Omega})$ tak, že $f = \tilde{f}$.

Z věty o jednoznačnosti víme, že tato $\tilde{f}$ je určena jednoznačně. Existují některé možnosti, jak analytické prodloužení sestrojit:

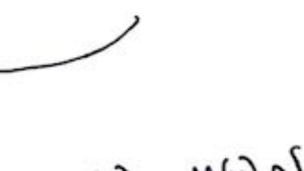
(I) $f_1 \in H(\Omega_1)$, $f_2 \in H(\Omega_2)$, $\underbrace{\Omega_1 \cap \Omega_2}_{\text{otevřené}} \neq \emptyset$ a $f_1 = f_2$ na $\Omega_1 \cap \Omega_2$

$\Rightarrow \tilde{f} = \begin{cases} f_1 & v\ \Omega_1 \\ f_2 & v\ \Omega_2 \end{cases}$ splňuje $\tilde{f} \in H(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ a $\tilde{f}$ je anal. prodloužení f_1 i f_2 na $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

(II) Spojité navázání holomorfních fcí, viz důsledek Morerovy věty.



(III) Prodloužení mocninných řad či lokální nalepování (viz komplexní logaritmus)



(IV) Schwarzův princip symetrie

Buď $\Omega \subset \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$, $\partial\Omega \supset I \subset \mathbb{R}$ a $\forall x \in I\ \exists\, U(x)$: $\underbrace{U(x) \cap \{z; \operatorname{Im} z > 0\}}_{\subset \Omega}$

Je-li $f \in H(\Omega)$, pak $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in \Omega^* = \{z; \bar{z} \in \Omega\} \end{cases} \in H(\Omega \cup \Omega^* \cup I)$.

Definice (Γ-funkce; Eulerova gamma fce)

$z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$: $\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx$ (*) Gamma funkce

▶ Ověřte, že $\Gamma(z)$ je definována vzorcem (*) pro $\{z; \operatorname{Re} z > 0\}$

▶ Γ je holomorfní v $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$

Dk: $g(x,z) = e^{-x} x^{z-1}$ $\quad z = u + iv$

$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(x,z) &= e^{-x} x^{z-1} \ln x \\ \frac{\partial g}{\partial v}(x,z) &= e^{-x} x^{z-1}\, i \ln x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + i \frac{\partial g}{\partial v}\right) = 0 \Rightarrow g$ vzhledem k z splňuje C-R

Dále pro $z \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} z > 0$ $\exists\, \varepsilon > 0, K > 0$ $\operatorname{Re} z \in \langle \varepsilon, K \rangle$ a pro takováto z najdu integrovatelné majoranty $\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right|$ a $\left|\frac{\partial g}{\partial v}\right|$ a tedy $\Gamma(z)$ splňuje C-R. podmínky dle Věty o derivování integrálu dle parametru. $\square$

▶ pro $z \in \mathbb{R}^+$ integrací per partes platí

$$\underline{\Gamma(z+1)} = \int_0^\infty \underset{-e^{-x}}{\underset{\downarrow}{e^{-x}}}\, \underset{zx^{z-1}}{\underset{\downarrow}{x^z}}\, dx = \left[-e^{-x}x^z\right]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx = \underline{z\Gamma(z)}$$

z věty o jednoznačnosti:

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0: \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)}$$

Tedy máme
$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(n+1) = n!$

Odsud, ze vztahu $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$, lze rozšířit Γ i pro $z: \operatorname{Re} z > -1$ s tím, že takto rozšířená fce má v 0 pól násobnosti jedna.

indukcí rozšíříme Γ na celou $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, \ldots, -n, \ldots\}$

a v $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ má takto rozšířená Gamma funkce pól násobnosti 1.

Dále $\operatorname{res}_0 \Gamma = 1$

a protože pro $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a \in (0,1\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$

$$\boxed{\Gamma(-n+a) = \frac{\Gamma(a)}{(-n+a)(-n+a+1)\ldots(-1+a)}}$$

$\Updownarrow$ $z = a - n$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(n+z)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$\Updownarrow$ $\begin{pmatrix} n \mapsto l+1 & l \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ l+1 \mapsto n & \end{pmatrix}$

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{\Gamma(n+1+z)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \qquad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}}$$

tak

$$\underline{\underline{\operatorname{res}_{-n}\Gamma}} = \frac{1}{-n(-n+1)\ldots(-n+n-1)} = \underline{\underline{\frac{(-1)^n}{n!}}}$$

Riemannova funkce zeta (The Riemann zeta function)

Řada $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\sigma}$ konverguje stejnoměrně pro $\forall \sigma \geq \sigma_0$, kde $\sigma_0 > 1$ pevné libovolné

Tato řada je také majorantou řady

$$\boxed{\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{kde} \quad s = \sigma + it}$$

Zobrazení $s \longmapsto \zeta(s)$ se nazývá $\underbrace{\text{Riemannova zeta-funkce}}$;

je definována takto pro $\forall s \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} s > 1$.

Tato funkce hraje ústřední roli v aplikaci $\mathbb{C}$ v teorii čísel.

Platí:

▶ Pro $s \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} s > 1$ $\qquad \zeta(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - p_m^{-s})}$ kde

(✿)

$p_1 < p_2 < \dots < p_m < \dots$ jsou prvočísla.

Dk

- $\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{m \text{ liché}} \frac{1}{m^s}$

- $\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \text{ není dělitelné } 2 \text{ či } 3}} \frac{1}{m^s}$

$\vdots$

- $\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m^s}\right) = \sum_{m \in A} \frac{1}{m^s}$

kde A jsou všechna přirozená čísla nedělitelná $\underbrace{2, 3, 5, 7, \dots p_m}_{\text{prvními } m \text{ prvočísly}}$

kde v řadě napravo je $1 + \frac{1}{p_{m+1}^s} + \dots$

což konverguje k 1 pro $m \to \infty$

a tedy vztah (✿) platí (pokud je prvočísel ∞ mnoho).

Kdyby však prvočísel byl konečný počet, řekněme M, tak z výpočtu výše

$$\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_M^s}\right) = 1$$

Odsud pro $\lim_{s \to 1}$: $\boxed{\zeta(1) < +\infty}$, ale to je spor, neboť $\zeta(1) = +\infty$

▷ Riemannovu zeta-fci lze rozšířit analyticky na $\mathbb{C}-\{1\}$.

Podobně jako u Eulerovy gamma-fce i zde lze využít "functional equation"

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) \tag{z}$$

a vlastnosti Γ funkce.

- $\zeta(s)$ má v 1 pól násobnosti 1, $\operatorname{res}_1 \zeta = 1$.
- Rozšířená ζ-fce má kořeny v bodech $\frac{\pi s}{2} = k\pi \Rightarrow s = 2k$, ale jen pro $k<0$, neboť pro $k>0$ jsou $\sin \frac{\pi s}{2}\Big|_{s=k\pi}$ "balancovány" póly $\Gamma(1-k\pi)$.

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k B_k}{2\,k!}$$

kde B_k jsou Bernoulliho čísla $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$

obecně: $\displaystyle \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j$

např.
$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

- Další kořeny ζ-fce leží v pásu $0 < \operatorname{Re} z < 1$, přičemž známé kořeny leží na $\operatorname{Re} z = 1/2$.

> Riemannova hypotéza říká, že všechny netriviální kořeny leží na přímce $\operatorname{Re} z = 1/2$

Problém úzce souvisí s distribucí prvočísel na reálné ose: kolik je prvočísel menších než dané číslo x?

▷ Z rovnice (z) plyne $\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Gamma(2)\,\zeta(2) = -\frac{1}{12}$

tento vztah však platí pro ζ-fci definovanou pro $\operatorname{Re} s < 1$ rovnicí (z); nikoliv samozřejmě pro původní definici Riemannovy zeta funkce. Tak jsme otřepinili "paradox":

$$1+2+3+4+\dots = -\frac{1}{12}$$

V posledních přednáškách jsme viděli, že komplexní analýza je velice mocný nástroj (a zdroj podnětů) v teorii parciálních diferenciálních rovnic, v teorii čísel, algebře, ale také teorii matic, funkcionální analýze, geometrii, ale i v samotné reálné analýze.

„Between two truths of the real domain, the easiest and shortest path quite often passes through the complex plain."

Spousta informací a nových poznatků byla důsledkem Cauchy-Goursatovy věty pro holomorfní funkce (dokázanou v našem případě přes Greenovu větu s pomocí Cauchy-Riemannových podmínek). Mimojiné, víme, že $\boxed{\text{je-li}}$ $f \in H(\Omega)$ tzn. $f'(z)$ existuje $\forall z \in \Omega$, $\boxed{\text{pak}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)} \in H(\Omega)$ tzn. $f \in H^{\infty}(\Omega)$ a tyto funkce lze psát lokálně ve tvaru mocninné řady

$\Longrightarrow$

Tato implikace je výrok o regularitě (hladkosti), který dostáváme jen ze studia mat. vlastností holomorfních fcí. Dokonce není potřeba holomorfnost, ale stačí splnění předpokladů Morerovy věty.

Implikaci jsme dokázali pomocí Cauchyho integrálního vzorce:

$$f \in H(B_R(a)): \quad f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(a)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz \qquad \text{kde } w \in B_\varrho(a)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z-w)^{-1}\, dz \qquad \text{kde } w \in \text{vnitřek } \Gamma$$

Zobecnění:

$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ matice, f analytická (holomorfní) fce

$$f(\mathbb{A}) :\overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\, dz \qquad \text{kde } \Gamma \subset \Omega$$

a Γ uzavírá spektrum matice $\mathbb{A}$.

které lze dále zobecnit pro neomezené operátory.

▷ Ztotožnění $\mathbb{R}^2$ s $\mathbb{C}$ je specifické. Platí Frobeniova věta (1877): pro $d > 2$ lze na $\mathbb{R}^d$ definovat "rozumné" násobení jen pro $d = 4$ (quaterniony tvoří nekomutativní těleso a užitečné v teoretické fyzice*), v popisu prostorových rotací, ...) a pro $d = 8$ (oktaniony, Cayleyho čísla)

*) Sabine Hossenfelder, teoretická fyzička v Frankfurtském institute pro pokročilé studia. KNIHA: LOST IN MATH.