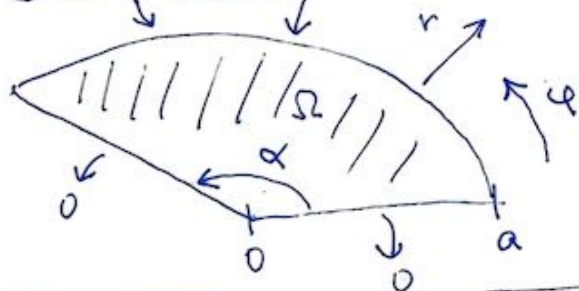


Úlohy pro Laplaceovu a Poissonovu rovnici

① najděte řešení $[-\Delta u = 0 \text{ v } \Omega]$, kde Ω je kulová výše, $\text{tzn } \Omega = \{(r, \varphi); 0 < r < a, 0 < \varphi < \alpha < 2\pi\}$, kde $a \in (0, \infty)$ a $\alpha \in (0, 2\pi)$ jsou daná čísla. Na hranici máme dané Dirichletské data:

$$(D)_1 \rightarrow \left. \begin{aligned} u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0 \quad \text{pro } r \in (0, a) \\ u(a, \varphi) = \varphi(\alpha - \varphi) \quad \text{pro } \varphi \in (0, \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

$$(D)_2 \rightarrow$$



Rěšení me to u LP Nabití a využit polární přirodnic. Pro ně $-\Delta u = 0$ kde $u = u(r, \varphi)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Rěšíme tedy (LP) a (D). Použijeme Fourierovu metodu separace proměnných: $u(r, \varphi) = R(r) \phi(\varphi)$
Dosazením této ansázu do rovnice (LP) dostaneme:

$$\frac{1}{r^2} R(r) \phi''(\varphi) + \left\{ \frac{1}{r} R'(r) + R''(r) \right\} \phi(\varphi) = 0$$

$$\Downarrow R(r) \neq 0, \phi(\varphi) \neq 0$$

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = - \frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(R1) \& (R2) \Downarrow \phi''(\varphi) + \lambda \phi(\varphi) = 0$$

$$(D1) \quad \phi(0) = \phi(\alpha) = 0$$

$$\& \left[\begin{aligned} r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) &= 0 \\ r \in (0, a) \end{aligned} \right]$$

Poslední rovnost
přijme a uvažujeme
 $G(r) = H(\varphi)$
jeu pořadí jsou
konstantní.

pak automaticky splníme obojí podmínky (D)₁. (naše
na vyšší, je také musíme splnit podmínky (D)₂.)

Dále budeme postupovat následovně

(i) VYŘEŠENÍ

$$\begin{cases} \phi''(\varphi) + \lambda \phi(\varphi) = 0 & \text{v } (0, \alpha) \\ \phi(0) = \phi(\alpha) = 0 \end{cases}$$

v (1)

zjistíme, že existují spíše řešení $\{\lambda_n, \phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ úlohy (1).

(ii) S λ_n malými n VYŘEŠENÍ

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0 \quad \text{v } (0, a) \quad (2)$$

najdeme je kladně λ_n odpovídající R_n

(iii) Řešení (LP) a (D) má tedy tvar

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(\varphi) R_n(r)$$

v (0, a) x (0, \alpha)

kde koeficienty b_n určíme z podmínky (D₂), tj.

$$u(a, \varphi) = \varphi(\alpha - \varphi) \quad (3)$$

Ad (i)

Charakteristika je $\phi'' + \lambda \phi = 0$ má tvar

$$\mu^2 + \lambda = 0 \quad \text{obdoba } \begin{cases} \mu_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda} & \text{ji-li } \lambda < 0 \\ \mu_{1,2} = 0 & \text{ji-li } \lambda = 0 \\ \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda} & \text{ji-li } \lambda > 0 \end{cases}$$

v (a) $\phi(\varphi) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$

s podmínkami $\phi(0) = \phi(\alpha) = 0$ plyne $c_1 = c_2 = 0$ tedy jin triviální řešení.

v (b)

$\phi(\varphi) = c_1 \varphi + c_2$ a podmínky $\phi(\alpha) = \phi(0) = 0$ opět implikují $\phi \equiv 0$.

v (g)

$$\phi(\varphi) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} \varphi + c_2 \sin \sqrt{\lambda} \varphi$$

s $\phi(0) = 0$ plyne $c_1 = 0$.
s $\phi(\alpha) = 0$ plyne $0 = c_2 \sin \sqrt{\lambda} \alpha$, což znamená
podm $\alpha \sqrt{\lambda} \alpha = n\pi \quad (n \in \mathbb{N})$. tj. $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{\alpha}$

Závěr: funkce $\left\{ \phi_n(\varphi) = \sin \frac{n\pi}{\alpha} \varphi \right\}_{n=1}^{\infty}$ jsou řešením (1)

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} \quad \text{(konstanta } c_2^m \text{ je libovolná)}$$

Jinak řečeno: $\forall n \in \mathbb{N} : \sin \frac{n\pi}{\alpha} \varphi$ splňuje

$$\begin{cases} \phi'' + \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} \phi = 0 & \text{v } (0, \alpha) \\ \phi(0) = \phi(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Ad (ii) Reč (2) je Eulerova reč, kterou píšeme, pro dané λ_m a předložíme další (i) ansatzem $R(r) = r^m$. Po dosazení do (2):

$$r^m (\underbrace{m(m-1) + m - \lambda_m}_{m^2 - \lambda_m}) = 0 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{\lambda_m}$$

Tedy obecní tvar $\overset{m^2 - \lambda_m}{m^2 - \lambda_m}$ má tvar:

$$R_m(\varphi) = D_1^m r^{\sqrt{\lambda_m}} + D_2^m r^{-\sqrt{\lambda_m}}$$

D_2^m položíme rovnou 0, abychom eliminovali část, která vytváří singularitu v počátku (a nepřechází podmínky) dle požadavků

Tedy $R_m(\varphi) = D_1^m r^{\sqrt{\lambda_m}} = D_1^m r^{\frac{n\pi}{a}}$

Ad (iii) Řešení $u(r, \varphi)$ má tedy obecní tvar

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\pi}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} \varphi$$

$\varphi \in (0, a)$
 $r \in (0, a)$

Přičemž u splňuje $\Delta u = 0$ v Ω a ohraničující podmínky (D1). Koeficienty $b_n (= C_2^m D_1^m)$ určíme z (D2):

(*) $\varphi(a - \varphi) = u(a, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a^{\frac{n\pi}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} \varphi$

Probereme $\int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} \varphi \sin \frac{k\pi}{a} \varphi d\varphi = 0$ pro $k \neq n$ vyčíslovíme (*) $\sin \frac{k\pi}{a} \varphi$ a integrujeme přes $(0, a)$ do rovnice

$$\int_0^a \varphi(a - \varphi) \sin \frac{k\pi}{a} \varphi d\varphi = b_k a^{\frac{k\pi}{a}} \int_0^a \left(\sin \frac{k\pi}{a} \varphi \right)^2 d\varphi$$

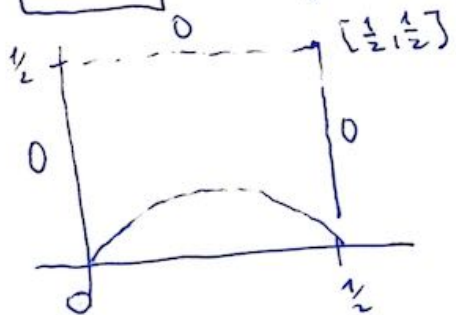
Tedy
$$b_k = \frac{a^{-\frac{2k\pi}{a}} \int_0^a \varphi(a - \varphi) \sin \frac{k\pi}{a} \varphi d\varphi}{\int_0^a \left(\sin \frac{k\pi}{a} \varphi \right)^2 d\varphi}$$

což dopočítáme následující 1. semestru. Vyjde $m \in \mathbb{N}$ tedy

$$b_m = \frac{-2 \cdot 2a^3}{a \cdot a^{\frac{2k\pi}{a}} \cdot \frac{2\pi^3}{3}} [(-1)^m - 1] = \begin{cases} 0 & m \in \mathbb{N} \text{ sudé} \\ \frac{8a^2}{m^3 \pi^3 a^{\frac{2k\pi}{a}}} & m \in \mathbb{N} \text{ liché} \end{cases}$$

Př. 2

Hledáme řešení



$$\Delta u = 0 \quad \text{v} \quad \Omega = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$u(0, y) = u\left(\frac{1}{2}, y\right) = 0 \quad y \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$u\left(x, \frac{1}{2}\right) = 0 \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$u(x, 0) = \sin^2(2\pi x) \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Řešení Hledáme řešení Fourierovou metodou.
 $u(x, y) = X(x)Y(y)$

Pat ① $-\Delta u = 0 \Rightarrow X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

$X \neq 0$
 $Y \neq 0$

$$\Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$\& Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

zde $\lambda \in \mathbb{R}$ je zatím libovolná konstanta.

② Z obdržených podmínek dostáváme

$$X(0) = 0, X\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\& Y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Naučíme se ještě s dostatečnými podmínkami

$$u(x, 0) = \sin^2(2\pi x) \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Potomže, u ODR pro X máme s obdrženými podmínkami,

takže

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

pro které již pro $\lambda > 0$ a je již dostatečně zpracováno:

$$X_n = \sin(2\pi n x) \text{ a } \lambda_n = 4\pi^2 n^2$$

$n \in \mathbb{N}$

③ ODR pro Y dostáváme

$$\begin{cases} Y''(y) - 4\pi^2 n^2 Y(y) = 0 \\ Y\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow Y_n = b_n e^{2\pi n y} + c_n e^{-2\pi n y}$
 a R podmínky $Y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ plyná

$$b_n e^{\pi n} + c_n e^{-\pi n} = 0 \Rightarrow c_n = -b_n e^{2\pi n}$$

tedy

$$Y_n = b_n (e^{2\pi n y} - e^{-2\pi n (y-1)})$$

Tedy
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(e^{2\pi n y} - e^{-2\pi n (y-1)} \right) \sin(2\pi n x)$$

vést rei i nulové Dirichletovy podmínky na ~~obě~~ stranách
 čtverce. Koefficienty b_n určíme z podmínky

$$u(x,0) = \sin^2(2\pi x),$$

tz.
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (1 - e^{-2\pi n}) \sin(2\pi n x) = \sin^2(2\pi x) \quad \text{na } (0, \frac{1}{2})$$

Podobně jako v předchozím příkladě můžeme vše (*)
 krát $\sin(2\pi k x)$ a integrovat přes x od 0 do $\frac{1}{2}$ dostaneme

$$b_k (1 - e^{-2\pi k}) \int_0^{\frac{1}{2}} [\sin^2(2\pi k x)] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (\sin^2 2\pi x) (\sin 2\pi k x) dx$$

což implies

$$b_k = \frac{4}{1 - e^{-2\pi k}} \int_0^{\frac{1}{2}} (\sin^2 2\pi x) (\sin 2\pi k x) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2-4} \right\} & \text{pro } k \text{ liché} \end{cases}$$

neboť

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (\sin^2 2\pi x) (\sin 2\pi k x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \cos 4\pi x) (\sin 2\pi k x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi k} [-\cos 2\pi k x]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(4\pi x) \sin(2\pi k x) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi k} (1 - (-1)^k) - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi(k+2)x) + \sin(2\pi(k-2)x) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi k} (1 - (-1)^k) + \frac{1}{4} \left[\frac{\cos 2\pi(k+2)x}{2\pi(k+2)} + \frac{\cos 2\pi(k-2)x}{2\pi(k-2)} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi k} (1 - (-1)^k) + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\cos \pi(k+2) - 1}{(k+2)} + \frac{\cos \pi(k-2) - 1}{k-2} \right]_0^{\frac{1}{2}} \quad \text{pro } k \neq 2$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{1}{2\pi k} - \frac{1}{2\pi(k^2-4)} & \text{pro } k \text{ liché} \end{cases}$$

Příklad 2 se zdá příliš speciální. Uvažme si však nyní, jak Dirichletovu úlohu na čtverci (pro nehomogenní data) vyřešit s pomocí příkladu 2. Každý čtverec lze považovat do počátku a Amenon metriku (více přesně je $- \Delta u = 0$ invariant) lze převést úlohu na čtverec o straně $\frac{1}{2}$. Uvažujme tedy úlohu

(Dir) $\Delta u = 0$ v $(0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2}) =: \Omega$ a $u = u_D$ na $\partial\Omega$

kde $u_D \in C(\partial\Omega)$. Uvažme nejdříve fci

$$u_F(x, y) = Axy + Bx + Cy + D$$

která je harmonická ($\Delta u_F = 0$) a kde A, B, C, D jsou libovolné, tj

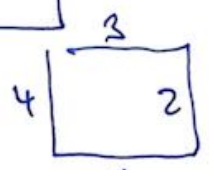
platí $u_F(0, 0) = u_D(0, 0)$ $u_F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = u_D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $u_F(0, \frac{1}{2}) = u_D(0, \frac{1}{2})$ $u_F(\frac{1}{2}, 0) = u_D(\frac{1}{2}, 0)$ 4 vce (podmínky) po A, B, C, D

Hledáme u řešení (Dir) ve tvaru

$$u(x, y) = v(x, y) + u_F(x, y)$$

pak v řeší $\Delta v = 0$ v Ω a $v = u_D - u_F$ na $\partial\Omega$

$u_D - u_F = 0$ v rovině čtverce. Nyní



v hledáme ve tvaru $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$

kde v_i řeší $\Delta v_i = 0$ v Ω a $v_i = u_D - u_F$ na i -té straně čtverce a na ostatních stranách je nulová.

Nyní každé v_i najdeme jako v Příkladu 2.

Všimněte si, jak jsme v Příkladu 2 nulovými Dirichletovými daty na třech stranách čtverce využili.



Příklad 3 Najděte Fundamentální řešení Helmholtzova operátoru $-\Delta + k^2$ ve třech dimenzích. ($k > 0$)
 Tj. hledáme u tak, u $(-\Delta + k^2)u = \delta$ v $\mathbb{R}^3$ $\textcircled{*}$

Hledáme dva porty řešení.

(A) Úloha (tvar operátoru a tvar pravé strany) vybírá v hledání sféricky symetrického řešení, tj. hledáme u ve tvaru

$$u(x) = v(|x|).$$

Po dosazení do $\textcircled{*}$, pro $|x| \neq 0$, máme

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(v'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right) + k^2 v(|x|) \\ &= -v''(|x|) - 2 \frac{v'(|x|)}{|x|} + k^2 v(|x|) \end{aligned}$$

Po vynásobení $|x|$ a označením $r = |x|$:

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad & r v''(r) + 2 v'(r) - k^2 r v(r) = 0 \\ & \underbrace{(r v(r))'' - k^2 (r v(r)) = 0} \end{aligned}$$

$$\Downarrow \quad r v(r) = C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}$$

Kombinací C_2 položíme rovnou 0, abychom eliminovali řešení jdoucí do $+\infty$ pro $|x| \rightarrow \infty$. Tedy

$$u(x) = \frac{C_1 e^{-k|x|}}{|x|}$$

řeší $(-\Delta + k^2)u = 0$ v $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Zbývá určit konstantu C_1 . Půběh $\frac{1}{4\pi|x|}$ splňuje

$$-\Delta \left(\frac{1}{4\pi|x|} \right) = \delta_0 \text{ v } \mathbb{R}^3 \text{ tak vidíme, že } \frac{1}{|x|} \text{ vygeneruje}$$

zdroj v počátku až po dvojnásobné diferenciace. Tedy

$$(-\Delta + k^2) \frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|} = \delta_0$$

$$\text{neboť } e^{-k|x|} \Delta \frac{1}{|x|} \sim \frac{1}{|x|^3} \quad \nabla e^{-k|x|} \cdot \nabla \frac{1}{|x|} \sim \frac{1}{|x|^2}$$

$$\frac{1}{|x|} \Delta e^{-k|x|} \sim \frac{1}{|x|^2} \quad \text{a} \quad \frac{k e^{-k|x|}}{4\pi|x|} \sim \frac{1}{|x|} \text{ v počátku.}$$



CV 6/8

③ Fundamentální píseň dvojčete Fourier transformace:

Aplikační F.T. na $(-\Delta + k^2)u = \delta$ dáváme

$$(4\pi^2|\xi|^2 + k^2)\hat{u}(\xi) = 1$$

a když $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2|\xi|^2 + k^2}$

což je radice fee

Pro radice fee platí: (viz Ceng, Polong, MatF IV, ...)

$$\boxed{r \in \mathbb{R}^3}: \mathcal{F}^{-1}[f(|\xi|)](x) = \frac{2}{|x|} \int_0^\infty f(r) \sin(2\pi r|x|) r dr$$

$$= \frac{2}{|x|} \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi r|x|)}{4\pi^2 r^2 + k^2} r dr \quad \begin{aligned} t &= 2\pi r|x| \\ dr &= \frac{dt}{2\pi|x|} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{|x|} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + k^2|x|^2} \frac{dt}{(2\pi|x|)^2} =$$

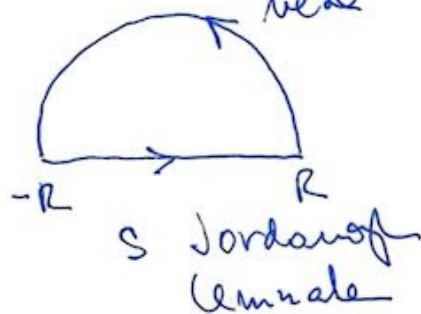
$$= \frac{1}{2\pi^2|x|} \int_0^\infty \frac{t \sin t}{t^2 + k^2|x|^2} dt = \frac{1}{4\pi^2|x|} \int_{-\infty}^\infty \frac{t \cdot \text{Im} e^{it}}{(t + ik|x|)(t - ik|x|)} dt$$

residuum = $\frac{1}{4\pi^2|x|}$

$$\text{Im} \left(2\pi i \text{Res}_{ik|x|} \left(\frac{ze^{iz}}{z^2 + k^2|x|^2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2|x|} \text{Im} \left(2\pi i \frac{(ik|x|) e^{-k|x|}}{2ik|x|} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi|x|} e^{-k|x|}$$



což je ve shodě s píseň ①.

