Termín pro odevzdání: pondělí 13. 12. 2021

1. Nalezněte **radiálně symetrické řešení** rovnice

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \qquad \text{v } \mathbb{R}^+ \times M,$$

kde $M = \{x \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ je mezikoulí. Počáteční podmínky jsou ve tvaru

$$u(0,x) = -\frac{\sin(2\pi|x|)}{|x|}\,,$$
$$u_t(0,x) = 0\,,$$

a okrajové podmínky

$$u - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{pro } |x| = \frac{1}{2} \text{ a } t > 0 \qquad \text{a} \qquad u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{pro } |x| = 1 \text{ a } t > 0\,,$$

kde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ je derivace ve směru vnější normály n.

Nápověda:

- Řešení u hledejme ve tvaru $u(t,x) = v(t,r)$, kde $r = |x|$. Problém (tj rovnici, okrajové a počáteční podmínky) poté přepišme jako úlohu na úsečce $(\frac{1}{2}, 1)$ pro novou neznámou $w(t,r) := rv(t,r)$.
- Data nové úlohy g **vhodně** (podle typu O.P.) prodlužte (na $\tilde{g}_P$) a proveďte periodizaci (tj. $\tilde{g}_P \star \delta_\Sigma$) a následně využijte vzorec odvozený na cvičeních

$$(w_F \star (\tilde{g}_P \star \delta_\Sigma))(t,r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(w_F)(t, \frac{n}{L})\, c_n\, e^{2\pi i \frac{n}{L} r}\,,$$

kde w_F je fundamentální řešení vlnové rce nové úlohy (v jedné prostorové dimenzi) a Fourierovský koeficient c_n se spočítá následovně

$$c_n = \frac{1}{L}\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(\frac{n}{L}) = \frac{1}{L}\langle \tilde{g}_P, e^{-2\pi i \frac{n}{L} r}\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L \tilde{g}_P(r) e^{-2\pi i \frac{n}{L} r}\, dr\,,$$

kde L je perioda (prodloužených) dat a předposlední rovnost chápeme ve smyslu působení distribuce $\tilde{g}_P$ (která může, ale nemusí být regulární, ale má kompaktní nosič) na "testovačku" $e^{-2\pi i \frac{n}{L} r}$ (z níž bychom korektní testovací fci udělali vhodným C^∞ seříznutím vně nosiče $\tilde{g}_P$). Poslední rovnost platí pokud je $\tilde{g}_P$ integrovatelná funkce.