Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	5	5	6	6	7	7	36
Získáno							

[5] 1. Metodou Taylorových polynomů určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x}\right) - \ln\left(1 + \frac{3x}{2}\right) + ax^2}{x^3}$$

byla vlastní. Tuto limitu spočtěte.

Řešení:

Stačí nám určit Taylorův polynom rozdílu

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x}\right) - \ln\left(1 + \frac{3x}{2}\right)$$

stupně 3 v bodě $x = 0$. Platí rozvoje

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

pro $x \to 0$. Tudíž

$$\begin{aligned} \ln\left(x + \sqrt{1+x}\right) &= \ln\left(1 + \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^3 + o(x^3) \\ &= \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{1}{2}\left(\frac{9x^2}{4} - \frac{3x^3}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{27x^3}{8}\right) + o(x^3) \\ &= \frac{3x}{2} + \frac{-1-9}{8}x^2 + \frac{1+3+18}{16}x^3 + o(x^3) \\ &= \frac{3x}{2} - \frac{5}{4}x^2 + \frac{11}{8}x^3 + o(x^3), \\ \ln\left(1 + \frac{3}{2}x\right) &= \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{8}x^3 + o(x^3), \\ \ln\left(x + \sqrt{1+x}\right) - \ln\left(1 + \frac{3}{2}x\right) &= \frac{-10+9}{8}x^2 + \frac{11-9}{8}x^3 + o(x^3) = -\frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{4} + o(x^3). \end{aligned}$$

Ihned vidíme, že musíme zvolit $a = \frac{1}{8}$ a pak limita vyjde rovná $\frac{1}{4}$.

[5] 2. Uvažujte funkci $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x,y) = \frac{yx^2}{y^2 + x^4}.$$

i. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Pokud limita existuje, určete, čemu se rovná.

ii. V libovolném bodě $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ spočtěte totální diferenciál f.

iii. Určete směrovou derivaci funkce f v bodě $(1,2)$ ve směru $v = (1,0)$.

Řešení:

Ad (i). Nejprve položme $y = kx$. Pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{k^2x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{k^2 + x^2} = 0 \tag{1}$$

pro každé $k \in \mathbb{R}$. Z tohoto výpočtu tedy nemůžeme určit, zda celková limita v počátku existuje.

Položme $y = x^2$. Pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(x^2)^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

To spolu s limitou (1) implikuje, že celková limita v počátku neexistuje.

Ad (ii). Protože $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, tak

$$\begin{aligned} df(x,y)(h_1,h_2) = \nabla f(x,y) \cdot (h_1,h_2) &= \left(\frac{2xy(y^2+x^4) - 4yx^5}{(y^2+x^4)^2}, \frac{x^2(y^2+x^4) - 2y^2x^2}{(y^2+x^4)^2} \right) \cdot (h_1,h_2) \\ &= \frac{1}{(y^2+x^4)^2} (2xy^3 - 2yx^5, x^6 - x^2y^2) \cdot (h_1,h_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Ad (iii).

$$\partial_v f(x,y) = df(x,y)(v_1,v_2) \overset{(2)}{=} \frac{1}{5^2}(12,-3)\cdot(1,0) = \frac{12}{25}.$$

[6] 3. Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ rozhodněte, zda mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} z^n$$

konverguje (absolutně či neabsolutně) nebo nekonverguje.

Řešení:
Položme $a_n := \frac{3^n}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \cdots$. Pak platí

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\sqrt{n}}} = 3 \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 3.$$

Zde jsme použili

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1, \tag{$\spadesuit$}$$

neboť

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{2n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2n}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}} = e^0 = 1,$$

kde jsme použili Heineho větu a l'Hospitalovo pravidlo. Poloměr konvergence řady je tedy $\frac{1}{3}$.
Dále studejme chování řady na kružnici konvergence a položme $z = \frac{e^{ix}}{3}$, $x \in [0, 2\pi)$. Pak máme určit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{ix}}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ixn}}{\sqrt{n}} \tag{$\diamondsuit$}$$

v závislosti na x.
Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{inx}$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in (0, 2\pi)$. Jelikož posloupnost $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje monotónně k nule, pak z Dirichletova kritéria plyne, že řada ($\diamondsuit$) konverguje. Pro $x = 0$ víme, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverguje.

[6] 4. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{y^2-3x^2}{yx}$. (Nápověda: ověřte, že se jedná o homogenní rovnici 1. řádu a použijte substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.)

Řešení:

Rovnici můžeme přepsat do tvaru $y' = \frac{y}{x} - 3\frac{x}{y}$. Jde tedy o homogenní rovnici a použijeme substituci $z = \frac{y}{x}$. Ta dává $y' = z + xz'$ a po úpravě (víme, že $x \neq 0$) dostaneme rovnici

$$z' = -\frac{3}{xz}.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými $z' = f(x)g(z)$ pro $f(x) = -\frac{1}{x}$ a $g(z) = \frac{1}{z}$.

Šestikrokový postup dává:

1. maximální intervaly pro definiční obor f jsou $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$,
2. funkce g nemá nulové body a maximální intervaly pro definiční obor g jsou $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$,
3. stacionární řešení nejsou,
4. $F(x) = -\log(|x|^3)$, $x \in I_1, I_2$ a $G(z) = \frac{z^2}{2}$, $z \in J_1, J_2$.
5. pro $I = I_1$ a $J = J_1$ a $C \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\{x : F(x) + C \in G(J)\} = \{x : -\log(-x^3) + C \in (0, \infty)\} = (-e^{\frac{C}{3}}, 0),$$

$G^{-1}(t) = -\sqrt{2t}$ a tedy dostáváme řešení

$$z_1(x) = -\sqrt{2C - 2\log(-x^3)} = -\sqrt{2C - \log(x^6)}, \quad x \in (-e^{\frac{C}{3}}, 0),\ C \in \mathbb{R}.$$

Pro $I = I_2$ a $J = J_1$ dostaneme obdobně řešení

$$z_2(x) = -\sqrt{2C - \log(x^6)}, \quad x \in (0, e^{\frac{C}{3}}),\ C \in \mathbb{R},$$

pro $I = I_1$ a $J = J_2$ a $C \in \mathbb{R}$ dostaneme řešení

$$z_3(x) = \sqrt{2C - \log(x^6)}, \quad x \in (-e^{\frac{C}{3}}, 0),\ C \in \mathbb{R},$$

a pro $I = I_2$ a $J = J_2$ dostaneme řešení

$$z_4(x) = \sqrt{2C - \log(x^6)}, \quad x \in (0, e^{\frac{C}{3}}),\ C \in \mathbb{R}.$$

6. lepit nelze.

Po zpětné substituci dostaneme pro původní rovnici řešení

$$y(x) = \pm x\sqrt{2C - \log(x^6)}, \quad x \in (-e^{\frac{C}{3}}, 0), (0, e^{\frac{C}{3}}),\ C \in \mathbb{R}.$$

Lepit stále nelze.

[7] 5. Mějme množinu
$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ x^2 + z^2 = 1\right\}.$$
Je množina $M \subset \mathbb{R}^3$ kompaktní? Nalezněte minimum a maximum funkce $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ vzhledem k M.

Řešení:

Položme $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ a $h(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$, potom
$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0 \ \wedge \ h(x, y, z) = 0\right\}.$$

Množina M je omezená (pro $(x, y, z) \in M$ platí $|x|, |y|, |z| \leq 1$) a uzavřená a tedy kompaktní (a neprázdná), f je spojitá vzhledem k M a tedy f nabývá maxima i minima vzhledem k M. K jejich určení použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Máme $\nabla f(x, y, z) = (0, 2y, 2z)$, $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ a $\nabla h(x, y, z) = (2x, 0, 2z)$. Vektory $\nabla g(x, y, z)$ a $\nabla h(x, y, z)$ jsou lineárně závislé pro $y = z = 0$ a $x \in \mathbb{R}$. V rámci množiny M to dává body $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 0)$.

V ostatních bodech množiny M, které jsou body lokálního (a tedy i globálního) extrému f vzhledem k M musí existovat $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, že
$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda x + 2\kappa x, \\ 2y &= 2\lambda y, \\ 2z &= 2\kappa z, \\ x^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 + z^2 &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Z druhé rovnice vidíme, že $y = 0$ nebo $\lambda = 1$ a ze třetí dostáváme $z = 0$ nebo $\kappa = 1$. To nám dává:

- pokud $y = 0$, dostaneme ze čtvrté rovnice $x = \pm 1$ a následně z páté rovnice $z = 0$,
- pokud $z = 0$, dostaneme z páté rovnice $x = \pm 1$ a následně ze čtvrté rovnice $y = 0$,
- pokud $\lambda = \kappa = 1$ dostaneme z první rovnice $x = 0$ a čtvrtá a pátá rovnice dávají $y = \pm 1$ a $z = \pm 1$.

První dva případy nedávají nic nového a poslední případ dává body $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$, $(0, 1, -1)$ a $(0, -1, -1)$. Dosazením dostáváme
$$f(0, 1, 1) = f(0, -1, 1) = f(0, 1, -1) = f(0, -1, -1) = 2$$
a
$$f(-1, 0, 0) = f(1, 0, 0) = 0.$$

První skupina bodů jsou tedy body globálního maxima a druhá body globálního minima f vzhledem k M.

[7] 6. Ukažte, že rovnice $xy + z + e^{x+y+z} = 0$ určuje v jistém okolí U bodu $(1, 1, -2)$ implicitně zadanou funkci proměnných x a y. Označme tuto funkci φ (tj. $z = \varphi(x, y)$). Spočtěte $\nabla\varphi(1, 1)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1, 1)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(1, 1)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1, 1)$. Rozhodněte o platnosti následujících výroků:

i. funkce $\varphi(x, y) + x + y$ má lokální minimum v bodě $(1, 1)$,

ii. funkce $\varphi(x, y) + x + y + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ má lokální minimum v bodě $(1, 1)$.

Řešení:

Označme $F(x, y, z) = xy+z+e^{x+y+z}$. Zjevně $F(1, 1, -2) = 0$. Protože $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 1+e^{x+y+z}$ dostáváme $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, -2) = 2 \neq 0$ a tedy funkce φ existuje. Navíc F je určitě C^2 a tedy i φ je C^2.

Spočítáme gradient a Hessovu matici funkce φ v bodě $(1, 1)$ derivováním rovnice $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$.

Derivováním podle x dostáváme

$$y + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) + \left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\right) e^{x+y+\varphi(x,y)} = 0 \tag{4}$$

a tedy

$$1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(1, 1) + \left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(1, 1)\right) e^{1+1-2} = 0$$

a úpravou dostaneme $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1, 1) = -1$. Ze symetrie dostaneme $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1, 1) = -1$ a tedy $\nabla\varphi(1, 1) = (-1, -1)$.

Následným derivováním podle x resp. y rovnice (4) dostaneme

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x, y)e^{x+y+\varphi(x,y)} + \left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\right)^2 e^{x+y+\varphi(x,y)} = 0$$

a

$$1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(x, y) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(x, y)e^{x+y+\varphi(x,y)} + \left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\right)\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)\right) e^{x+y+\varphi(x,y)} = 0.$$

Dosazením $x = y = 1$, $\varphi(1, 1) = -2$ a $\nabla\varphi(1, 1) = (-1, -1)$ dostaneme

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1, 1) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1, 1)e^{1+1-2} + (1 - 1)^2 e^{1+1-2} = 0$$

a

$$1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(1, 1) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(1, 1)e^{1+1-2} + (1 - 1)(1 - 1)e^{1+1-2} = 0.$$

Po úpravě $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1, 1) = 0$ a $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}$. Opět ze symetrie dostáváme $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1, 1) = 0$ a $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{2}$. Máme tedy Hessovu matici funkce φ v bodě $(1, 1)$ ve tvaru

$$H_\varphi(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro zodpovězení poslední dvou otázek označíme $\psi(x, y) = \varphi(x, y)+x+y$ a $\xi(x, y) = \varphi(x, y)+x+y+(x-1)^2+(y-1)^2$. Potom snadno dostaneme

$$\nabla\psi(1, 1) = \nabla\xi(1, 1) = (0, 0), \quad H_\psi(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad H_\xi(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Snadno vidíme, že $H_\psi(1, 1)$ je indefinitní (vl. čísla $\pm\frac{1}{2}$) a $H_\xi(1, 1)$ je pozitivně definitní (podle Sylvestrova kritéria, nebo vl. čísla $\frac{3}{2}$ a $\frac{5}{2}$) a tedy výrok (i) není pravdivý a výrok (ii) je pravdivý.