

Jméno a příjmení: _____

Jméno cvičícího: _____

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Body	11	11	8	30
Získáno				

- [11] 1. (a) Uveďte definici Schwartzova prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a jeho duálu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. (b) Rozhodněte a odůvodněte zda tyto funkce patří do $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

- $f_1(x) = \frac{1}{1+|x|^4}$
- $f_2(x) = \exp(-|x-3|^4)$
- $f_3(x) = \exp(-|x|)$

Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} \varphi(x) dx$ patří do $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Odůvodněte.

(c) Vysvětlete, jak porozumět inkluzi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$?

(d) Uveďte formulaci inverzního Fourierova vzorce a rozhodněte, zda vzorec platí na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nebo $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. V kladném případě vzorec dokažte (stačí vysvětlit ideu důkazu).

- [11] 2. (a) Pro nehomogenní vlnovou rovnici zadefinujte:

- Cauchyho (počáteční) úlohu,
- počáteční a smíšenou okrajovou úlohu v omezené otevřené d -rozměrné množině.

Explicitně uveďte, co jsou data těchto úloh a co rozumíte řešením.

(b) Najděte explicitní řešení Cauchyho (tj počáteční) úlohy pro vlnovou rovnici v jedné prostorové dimenzi s nulovou pravou stranou. Specifikujte co nejobecnější třídu počátečních dat, pro které bude řešení regulární distribucí. Co je fundamentální řešení jednorozměrné vlnové rovnice? Jaký má tvar?

(c) Zformulujte energetickou nerovnost pro hladká řešení počáteční a smíšené okrajové úlohy v omezené otevřené d -rozměrné množině. Ukažte, jak z této nerovnosti vyplývá jednoznačnost hladkých řešení a konečná rychlost šíření signálu.

- [8] 3. (a) Uveďte definici Laplaceovy transformace pro funkce z vhodné přípustné množiny funkcí včetně definičního oboru.

(b) Ukažte, že Laplaceova transformace je na vnitřku definičního oboru holomorfní.

(c) Odvoďte vztah pro druhou derivaci Laplaceovy transformace funkce f .

(d) Zformulujte větu o inverzi Laplaceovy transformace pro komplexní funkce klesající v nekonečnu alespoň jako $|p|^{-2}$. Symboly ve znění věty pečlivě zadefinujte/vysvětlete.