4. HLUBŠÍ VLASTNOSTI SPOJITÝCH A DIFERENCOVATELNÝCH FUNKCÍ

4.1 LOKÁLNÍ EXTRÉMY, GLOBÁLNÍ EXTRÉMY. VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCÍ NA UZAVŘENÉM INTERVALU.

Def • Buď $\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$. Řekneme, že

(*) f má v $x_0 \in D_f$ $\left\{\begin{array}{l}\text{lokální MINIMUM} \\ \text{lokální MAXIMUM}\end{array}\right\} \overset{df}{\equiv}$ Existuje-li $P_\delta(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$: $\left\{\begin{array}{l} f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \end{array}\right.$

- Lokální extrémy = body, ve kterých f nabývá lokálního minima či maxima
- Ostrý lokální extrém = $\underbrace{\text{buď ostré lokální minimum nebo ostré lokální maximum}}_{\text{nerovnosti v (*) jsou ostré, tj. } \forall x \in P_\delta(x_0): \left\{\begin{array}{l} f(x) > f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \end{array}\right.}$

Věta 4.1 NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE LOKÁLNÍHO EXTRÉMU

Je-li x_0 lokální extrém fce f a $f'(x_0)$ existuje, pak nutně $f'(x_0) = 0$.

Dk Víme, že $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0) > 0$ nebo $f'(x_0) < 0$. Musíme tedy vyloučit zbylé dva případy. Když $f'(x_0) > 0$, pak z vlastnosti nenulové limity (Věta 6) dostáváme $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$.

To však znamená: pro $x \in P^+_\delta(x_0)$: $f(x) > f(x_0)$
pro $x \in P^-_\delta(x_0)$: $f(x) < f(x_0)$

což znamená, že f nemá v x_0 lokální extrém. Spor. ↯
Pokud by $f'(x_0) < 0$, postupujeme podobně. ■

! Pozor! Podmínka $f'(x_0) = 0$ nestačí (tj. není postačující) k tomu, aby f měla v x_0 lokální extrém, jak ukazuje následující příklad:

Př: Pro $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí: $f'(x) = 3x^2$ a $f'(x) = 0$ pro $x = 0$.
Ale f nemá v $x_0 = 0$ lokální extrém: v $P^+_\delta(0)$: $x^3 > 0$,
v $P^-_\delta(0)$: $x^3 < 0$. ■

Tedy opačná (obrácená) implikace k Větě 4.1 neplatí. Věta 4.1 nám však indikuje, kde může mít fce lokální extrémy: podezřelými body jsou body, kde $f'(x_0)$ neexistuje nebo $\boxed{f'(x_0) \text{ existuje a } f'(x_0) = 0}$.

Def Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\emptyset \neq M \subset D_f$. Řekneme, že

<u>f nabývá na M globální extrém</u> $\overset{df}{\equiv}$ $\exists\, x_0 \in M$ tak, že $\forall x \in M$ je

BUĎ	$f(x) \leq f(x_0)$	<u>globální maximum</u>
NEBO	$f(x) \geq f(x_0)$	<u>globální minimum</u>

Ukážeme si (postupně) několik významných vlastností funkcí, které jsou <u>spojité</u> na <u>uzavřeném intervalu</u>:

$$\boxed{\begin{gathered} f \text{ spojitá na } \langle a,b\rangle \\ \| \text{ označení} \\ f \in C(\langle a,b\rangle) \end{gathered}} \Rightarrow$$

angl. <u>continuous</u>

(1) f nabývá na $\langle a,b\rangle$ globální minimum a globální maximum, speciálně
(2) f je omezená na $\langle a,b\rangle$
(3) f nabývá všech mezihodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$
(4) f je stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$

První a druhá vlastnost plynou z následující věty.

Věta 4.2 Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak f nabývá na $\langle a,b\rangle$ maxima i minima. Speciálně: f je omezená na $\langle a,b\rangle$.

Dk Označme $S := \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} \{f(x)\} = \sup f(\langle a,b\rangle)$ (v $\mathbb{R}^*$ vždy existuje).

Ukážeme, že existuje $x_0 \in \langle a,b\rangle$ tak, že $f(x_0) = S$.

[V tuto chvíli však ani nevíme, že $S < +\infty$.].

Z definice suprema však plyne:

- je-li $S \in \mathbb{R}$, pak pro $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in \langle a,b\rangle$ tak, že $S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S$
- kdyby $S = +\infty$, pak pro $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in \langle a,b\rangle$ tak, že $f(x_n) > n$

V obou případech $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{a \leq x_n \leq b}$ a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená.

Z Weierstrassovy věty plyne existence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Z věty o srovnávací a proto, že $a \leq x_{n_k} \leq b$ plyne $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Pak však $x_{n_k} \to x_0$ a dle Heineho věty a spojitosti f: $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in \mathbb{R}$. Současně $f(x_n) \to S$ tak $\boxed{f(x_0) = S}$ ∎

$\boxed{\text{Věta 4.3}}$ (Jak nalézt extrémy?) Buď $f \in C((a,b))$ a $A = \lim_{x \to a+} f(x) \in \mathbb{R}$ a $B = \lim_{x \to b-} f(x) \in \mathbb{R}$. Označme

$$P := \{ x \in (a,b) ;\ f'(x) = 0 \text{ nebo } f'(x) \text{ neexistuje} \} \quad \text{a} \quad H := \max_{x \in P} f(x)$$

Pak platí

$$H = \max_{x \in (a,b)} f(x) \iff H \geq \max\{A, B\}$$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Je-li H maximální hodnota, pak $f(x) \leq H$ pro všechna $x \in (a,b)$. Tedy, dle věty o limitním přechodu v nerovnostech

$$\underline{A := \lim_{x \to a+} f(x) \leq H} \quad \text{a} \quad \underline{B := \lim_{x \to b-} f(x) \leq H}.$$, což implikuje $\max\{A,B\} \leq H$

$\boxed{\Leftarrow}$ Je-li $H \geq \max\{A,B\}$ a kdyby H nebyl maximem $f(x)$ přes $x \in (a,b)$, pak existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) > H$. Pak také $f(x_0) > A$ a $f(x_0) > B$. Z vlastností $\lim_{x \to a+} f(x)$ a $\lim_{x \to b-} f(x)$ plyne existence $\delta > 0$ tak, že

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (a, a+\delta) \cup (b, b-\delta).$$

Tedy $x_0 \in \langle a+\delta, b-\delta \rangle$, kde je f spojitá. Dle Věty 4.2 f nabývá v $\langle a+\delta, b-\delta \rangle$ globální maximum v nějakém bodě $z \in \langle a+\delta, b-\delta \rangle$. Pak však $f(z) \geq f(x_0) > H$ a protože z je extrém, tak z pohledu derivace mohou nastat jen dva případy: buď $f'(z) = 0$ nebo $f'(z)$ neexistuje. V každém případě $z \in P$ a dostáváme spor s definicí H, coby $\sup_{x \in P} f(x)$.

Q.E.D.

Věta 4.3 poskytuje návod k hledání extrémů f na množině $\langle a,b \rangle$. Nejdříve identifikujeme množinu podezřelých bodů

$$P := \{ x \in (a,b) ;\ f'(x) = 0 \text{ nebo } f'(x) \text{ neexistuje} \} \cup \{a\} \cup \{b\}.$$

Pak hledáme $\max_{x \in P} f(x)$ a $\min_{x \in P} f(x)$. Protože P je často konečné, je proces snadno zvládnutelný.

Příklad Najděte extrémy funkce $f(x) = 9|x| - x^3$ na $\langle -2,2\rangle$.

Řešení Maximum i minimum určitě existují neboť f je spojitá na $\langle -2,2\rangle$, tj. $f \in C(\langle -2,2\rangle)$. Protože $f'(x)$ existuje v $(-2,0)\cup(0,2)$ a zde navíc platí

$$f'(x) = 9\,\mathrm{sgn}\,x - 3x^2 = 3\left(3\,\mathrm{sgn}\,x - x^2\right) = \begin{cases} 3(3-x^2) & \text{na } (0,2), \\ -3(3+x^2) & \text{na } (-2,0). \end{cases}$$

a tak $f'(x) = 0$ v $(-2,0)\cup(0,2) \iff x = \sqrt{3}$, tak množinu podezřelých bodů P tvoří: $P = \{-2, 0, \sqrt{3}, 2\}$. Máme

x	-2	0	$\sqrt{3}$	2
$f(x)$	26	0	$6\sqrt{3}$	10

a odsud plyne, že $x = -2$ je bod globálního maxima,
$x = 0$ — minima.

Z vypočtené $f'(x)$ také plyne, že $f'(x)$ je kladná na $(-2,0)$ a $(\sqrt{3},2)$ a záporná na $(0,\sqrt{3})$.

$$\begin{array}{cccc} - - - - & + + + + + & - - & \\ -2 & 0 & \sqrt{3} & 2 \end{array}$$

Tedy f klesá na $(-2,0)$, roste na $(0,\sqrt{3})$ a klesá na $(\sqrt{3},2)$.

Tedy v -2 a $\sqrt{3}$ jsou lokální maxima a v 0 a 2 lokální minima. ∎

Věta 4.4 (Darbouxova věta o nabývání mezihodnot). Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $c \in (f(a);f(b))$ $(\exists x_0 \in \langle a,b\rangle)$ $f(x_0) = c$.

Dk Když $f(a) = f(b)$, jsme hotovi. Je-li $f(a) \neq f(b)$, lze předpokládat, že např. $f(a) < f(b)$ [jinak postupujeme podobně.].

Označme $M := \{x \in \langle a,b\rangle;\ f(x) < c\}$. Pak platí:

- $M \neq \emptyset$ neboť $a \in M$
- M obsahuje $(a, a+\delta)$ neboť $f(a) < c$ a $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ ze spojitosti.
- M je omezená
- $M \neq \langle a,b\rangle$ neboť $b \notin M$
- M neobsahuje $(b-\delta, b)$ pro nějaké $\delta > 0$ (opět proto, že $f(b) > c$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$ ze spojitosti)

Existuje tedy $x_0 \in (a,b)$ tak, že $x_0 = \sup M$. Pak však

$x_n := x_0 - \frac{1}{n} \in M$ a $x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$ ale $f(x_n) < c \implies f(x_0) \leq c$,

$y_n := x_0 + \frac{1}{n} \notin M$ a $y_n \to x_0 \implies f(y_n) \to f(x_0)$, ale $f(y_n) \geq c \implies f(x_0) \geq c$,

což je možné splnit jen pokud $\underline{f(x_0) = c}$. To je však tvrzení, které jsme chtěli ukázat. ∎

Věta 4.5 Buď $f \begin{Bmatrix} \text{neklesající} \\ \text{nerostoucí} \end{Bmatrix}$ na (a,b) a nechť $\underbrace{f((a,b))}_{=\text{obor hodnot } R_f}$ je interval.

Pak f je spojitá na (a,b).

Dk. Sporem. Kdyby f nebyla spojitá na (a,b), tak existuje $x_0 \in (a,b)$, ve kterém f není spojitá. Přitom však, díky monotónii, existují v bodě x_0 jednostranné limity:

$$\alpha = \lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{a} \quad \beta = \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

($\alpha \neq \beta$ neboť f není v x_0 spojité)

Opět z monotónie f však plyne, že interval mezi α a β není částí oboru hodnot R_f, což je spor s předpokladem, že $R_f = f((a,b))$ je interval. ▨

Věta 4.6 (O existenci spojité inverzní funkce)

Buď $f \in C((a,b))$ rostoucí (nebo klesající) na (a,b); $A := \lim_{x \to a+} f(x)$, $B := \lim_{x \to b-} f(x)$

Pak k f existuje f^{-1} a platí:
- $D_{f^{-1}} = (A;B)$
- $R_{f^{-1}} = (a,b)$
- f^{-1} je spojitá a rostoucí (nebo klesající) na $(A;B)$.

Dk. Připomeňme, že $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x \to b-} f(x)$ existují dle Věty 3.9, ale A, B nemusí být vlastní.

Kdyby $A, B \in \mathbb{R}$, pak lze dodefinovat/předefinovat f v a a b těmito limitami a $f \in C(\langle a,b \rangle)$. Pak dle Darbouxovy věty 4.4 a díky ryzí monotónii:

$\forall C \in (A;B)$ existuje právě jedno $x_C \in (a,b)$: $f(x_C) = C$

Definuj $\boxed{f^{-1} : C \mapsto x_C}$ a dle výše uvedeného je to funkce.

Navíc a) $f^{-1} : (A;B) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ je rostoucí (resp. klesající)

Vskutku: chceme $\boxed{C < D \Rightarrow x_C < x_D}$

ale to je ekvivalentní $\neg(x_C < x_D) \Rightarrow \neg(C < D) \Leftrightarrow x_C \geq x_D \Rightarrow \underset{f(x_C)}{C} \geq \underset{f(x_D)}{D}$

což plyne z toho, že f je rostoucí (rovnost nastane jen pro $x_C = x_D$)

b) f^{-1} je spojitá na $(A;B)$, což plyne z předchozí věty, neboť $f^{-1}((A;B)) = (a,b)$ je interval.

Kdyby $A \in \mathbb{R}, B = +\infty$ a f rostoucí a $C \in (A,+\infty)$. Pak existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) > C$. Uvažme $f|\langle a,x_0 \rangle$. Pak $f \in C(\langle a,x_0 \rangle)$ a postupujme jako výše. ▨

Když $\boxed{A = -\infty, B \in \mathbb{R}}$ nebo $\boxed{A = -\infty, B = +\infty}$ postupujeme podobně.

$\boxed{\text{Def}}$ (stejnoměrné spojitosti) Buď f definovaná na (otevřeném, uzavřeném či polouzavřeném) intervalu J. Pak

f je stejnoměrně spojitá na J $\equiv (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x', x'' \in J)$:
$$|x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Cvičení: Je-li f stejnoměrně spojitá v $J \Rightarrow f \in C(J)$.

$\boxed{\text{Příklad}}$ $f(x)=\frac{1}{x} \in C((0,1))$, ale $f(x)$ není stejnoměrně spojitá na $(0,1)$, neboť
$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right| \underset{x'<x''}{=} \frac{x''-x'}{x'x''} \underset{x'=\frac{x''}{2}}{=} \frac{\frac{x''}{2}}{\frac{(x'')^2}{2}} = \frac{1}{x''} > 1 \quad \text{pro } 0<x''<1$$

Proto je zajímavé, že platí:

$\boxed{\text{Věta 4.7}}$ (Cantorova) Je-li $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak f stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$.

Dk: Předpokládejme $f \in C(\langle a,b\rangle) \wedge f$ není stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$.

Pak $(\exists \varepsilon_0>0)(\forall \delta, \text{spec. } \delta=\frac{1}{n})\ \exists x'_n, x''_n \in \langle a,b\rangle$ tak, že
$$|x'_n-x''_n|<\frac{1}{n} \text{ a } |f(x'_n)-f(x''_n)| \geq \varepsilon_0. \qquad (\circledast)$$

Protože $\{x'_n\}$ je omezená, dle Weierstrassovy věty existuje
$$\{x'_{n_k}\} \subset \{x'_n\} \text{ tak, že } x'_{n_k} \to x_0 \text{ kde } x_0 \in \langle a,b\rangle.$$

Ale pak $x''_{n_k} \to x_0$ také neboť $|x'_n-x''_n|<\frac{1}{n}$.

Tak
$$f(x'_{n_k}) \to f(x_0), \quad f(x''_{n_k}) \to f(x_0) \quad \text{dle Heineho věty,}$$
což ihned dává $\lightning$ s $(\circledast)$. $\blacksquare$

4.2 Věty o střední hodnotě a jejich důsledky

Věta 4.8 (ROLLEOVA) Pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí:

$$\text{Je-li } \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ f \in C(\langle a,b \rangle) \\ \cdot\ f'(x) \text{ existuje pro } \forall x \in (a,b) \\ \cdot\ f(a) = f(b) \end{array} \right\}, \text{ pak } \exists\, \xi \in (a,b):\ f'(\xi) = 0$$

Dk Buď $f \in C(\langle a,b \rangle)$ taková, že $f(a) = f(b)$. Pak musí nutně nastat jedna z následujících možností:

(i) $f(x) = C \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in \langle a,b \rangle$ (tedy f je konstantní fce)

(ii) $\exists\, x_1 \in (a,b)$ $\quad f(x_1) > f(a) = f(b)$

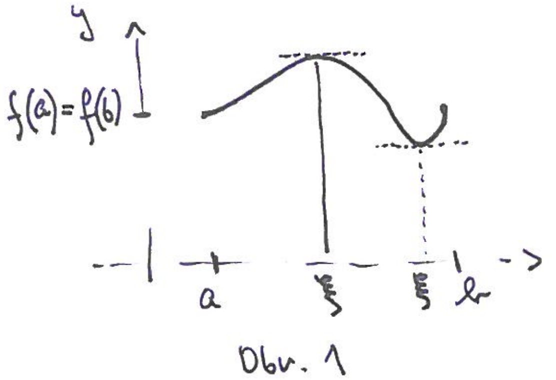
(iii) $\exists\, x_2 \in (a,b)$ $\quad f(x_2) < f(a) = f(b)$.

Pokud nastane (i), pak za ξ lze vzít jakýkoliv bod z (a,b).
Pokud nastane (ii), pak dle Věty 4.2 víme, že existuje $\xi_{MAX} \in (a,b)$
$f(x) \leq f(\xi_{MAX})$ $\forall x \in (a,b)$. Protože $f'(\xi_{MAX})$ existuje, tak (nutně) dle Věty 4.1 $f'(\xi_{MAX}) = 0$.
Pokud nastane (iii), argumentujeme stejně: $\exists\, \xi_{MIN} \in (a,b)$ tak, že $f(x) \geq f(\xi_{MIN})$ $\forall x \in (a,b)$. Opět $f'(\xi_{MIN}) = 0$. ▨

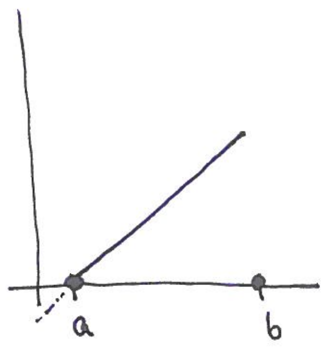
- Věta Rolleova je schématicky znázorněna na Obr. 1.
- Předpoklady věty 4.8 nelze oslabit, jak ukazují tyto příklady:

Př. 1 Buď $f(a) = 0 = f(b)$, $f(x) = x - a$ pro $x \in (a,b)$, viz Obr. 2.
Pak $f(a) = f(b)$, $f \in C((a,b))$, $\exists\, f'(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$ ale neexistuje $\xi \in (a,b)$ $f'(\xi) = 0$.

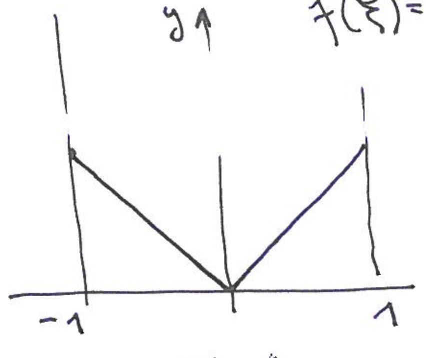
Př. 2 $f(x) = |x|$ na $\langle -1,1 \rangle$ splňuje $f(-1) = f(1)$, $f \in C(\langle -1,1 \rangle)$, $f'(x)$ existuje $\forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, viz Obr. 3, ale opět neex. $\xi \in (-1,1)$ $f'(\xi) = 0$



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Př. 3 Věta 4.8 neplatí pro $f: (a,b) \to \mathbb{C}$. Stačí uvažovat $f(x) = \cos x + i \sin x$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$.

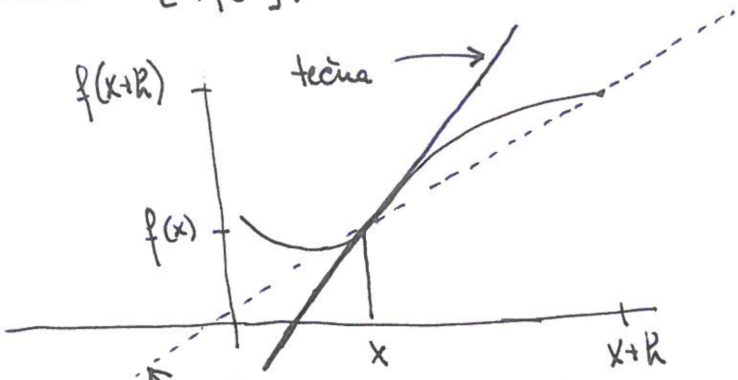
Připomeňme si situaci na začátku kapitoly o limitě a derivaci. Mám dánu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hledám tečnu ke grafu fce f ($f'(x)$ existuje) v bodě $[x, f(x)]$.

Protože rovnice přímky procházející body $[x, f(x)]$ a $[x+h, f(x+h)]$ má tvar:

$$y(h) = f(x) + \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}(x+h-x),$$

hledaná rovnice tečny má tvar

$$\boxed{t(h) = f(x) + f'(x)\,h \quad \forall h \in \mathbb{R}}$$



Body $\xi \in (a,b)$ z Rolleovy věty 4.8 jsou body, kde tečna je rovnoběžná s osou x: $t(h) = f(\xi)$ $\forall h \in \mathbb{R}$.

DŮLEŽITÝMI ZOBECNĚNÍMI ROLLEOVY VĚTY 4.8 JSOU LAGRANGEOVA A CAUCHYHO VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ.

Věta 4.9 (LAGRANGEOVA věta o střední hodnotě = LVOSH)

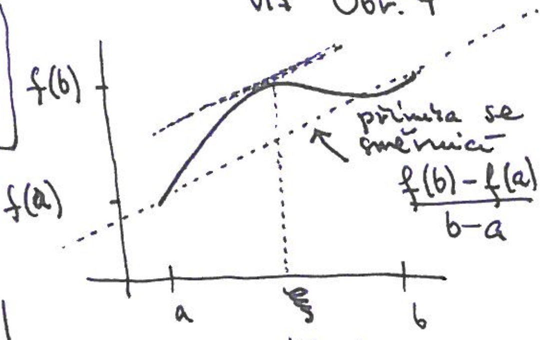
Pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí:

Je-li $\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ f \in C(\langle a,b \rangle) \\ \cdot\ \exists f'(x) \text{ pro } \forall x \in (a,b) \end{array} \right\}$, pak $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

viz Obr. 4

Dk Definuj

$$\boxed{F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$



Obr. 4

Potom $\left.\begin{array}{l} F(a) = f(a) \\ F(b) = f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow F(a) = F(b)$.

Navíc $F \in C(\langle a,b \rangle)$ a $F'(x)$ existuje pro všechna $x \in (a,b)$. Tedy F splňuje předpoklady Rolleovy věty 4.8 a existuje tedy $\xi \in (a,b)$ takové, že $F'(\xi) = 0$. Pak však $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ∎

[z derivování F v rámečku]

Věta 4.10 (CAUCHYHO věta o střední hodnotě)

Pro $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí:

Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ f,g \in C(\langle a,b\rangle) \\ \bullet\ f'(x) \text{ a } g'(x) \quad \text{existují } \forall x \in (a,b) \end{array} \right\}$, pak $\exists \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big) = g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}\text{, pokud mohu dělit.}$$

viz obr. 5

Dk: Nyní definujme

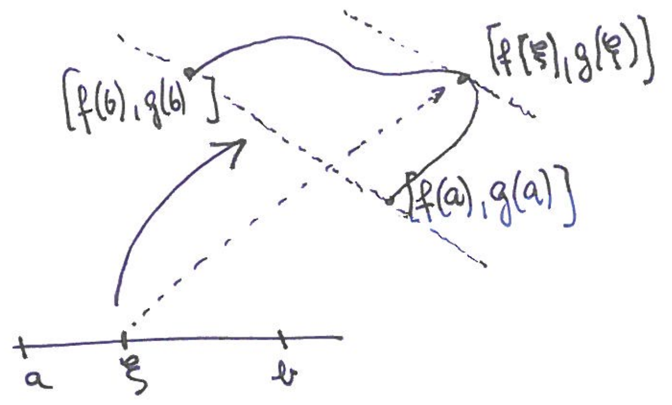
$$F(x) := \big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big) - \big(g(x)-g(a)\big)\big(f(b)-f(a)\big)$$

Pak:

- $F(a) = 0 = F(b)$
- $F \in C(\langle a,b\rangle)$
- $F'(x) = f'(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g'(x)\big(f(b)-f(a)\big)$ existují pro $\forall x \in (a,b)$

Křivka: zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$

$x \longmapsto (f(x), g(x))$



obr. 5

Dle Rolleovy věty 4.8: $\exists \xi \in (a,b)$

$F'(\xi) = 0$, což implikuje,

spolu se vzorcem pro $F'(x)$, tvrzení věty.

☒

DŮSLEDKY Lagrangeovy VOSH

1 Dokončení důkazu o (ne)jednoznačnosti primitivní funkce, viz **Věta 18**

Chceme ukázat: Pokud $H'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$, pak $H(x) = C \in \mathbb{R}$.

Víme, že H je spojitá v každém $x \in (a,b)$ (neb $H'(x)$ existuje). Buď $x_0 \in (a,b)$ pevné. Ukážeme, že pro $\forall x \in (a,b)$: $H(x) = H(x_0)$.

Buď $x \in (a,b)$ pevné. Pak $H \in C(\langle x; x_0\rangle)$ a dle LVOSH: $\exists \xi \in (x; x_0)$

$$H'(\xi) = \frac{H(x)-H(x_0)}{x-x_0} \quad \text{ale } H'(\xi) = 0. \text{ Tedy } H(x) = H(x_0).$$

☒

2 Pomocí LVOSH lze dokázat různé nerovnosti. Například platí:

$$(\forall x,y \in \mathbb{R}) \quad |\sin x - \sin y| \le |x-y|$$

Dk:

$$\frac{\sin x - \sin y}{x-y} \underset{\uparrow \atop \text{LVOSH}}{=} \cos \xi,$$

kde ξ je nějaký bod mezi x a y

Protože $|\cos \xi| \le 1$, tvrzení snadno plyne.

☒

[3] Platí důležitá věta o jednostranných derivacích:

Máme-li $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ takovou, že $f'(x)$ existuje pro všechna $x\in(a,b)$.

Pak má smysl zkoumat $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ a $\lim\limits_{x\to b-} f'(x)$.

Zajímá nás jednak zda tyto limity existují a také, zda se rovnají $f'(a+)$ a $f'(b-)$ definované jako

$$f'(a+) = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{resp.} \quad f'(b-) = \lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

Odpověď je zformulována v následujícím tvrzení.

$\boxed{\text{Věta 4.11}}$ (O jednostranných derivacích). Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taková, že

(i) f je spojitá v a zprava

(ii) existuje $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ a rovná se $A\in\mathbb{R}^*$

Potom $f'(a+)$ existuje a rovná se A.

Dk Z (ii) plyne, že $f'(x)$ musí existovat na jistém pravém okolí bodu a. V těchto bodech je f spojitá. Víme tedy, že existuje $\delta>0$ tak, že
- f je spojitá na $\langle a,a+\delta)$
- $f'(x)$ existuje na $\langle a,a+\delta)$

Dle LVOSH (Věta 4.9) však pro $\forall x\in(a,a+\delta)$ $\exists \xi_x\in(a,x)$ tak, že

$$\boxed{f'(\xi_x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Přechodem k $\lim\limits_{x\to a+}$ dostáváme tvrzení. ∎

Příklad Buď $f(x)=\arcsin x : \langle -1,1\rangle \xrightarrow{na} \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$ rostoucí.

Určete $f'(-1+)$ a $f'(1-)$.

Řešení: Protože f je spojitá v -1 zprava a v 1 zleva, a protože $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x\in(-1,1)$, tak dle Věty 4.11

$$f'(-1+) = \lim_{x\to -1+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \quad \text{a} \quad f'(1-) = \lim_{x\to 1-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

∎

[4] Platí následující charakterizace monotónie pro diferencovatelné funkce

tj. funkce, které mají derivaci všude v intervalu

Věta 4.12 Buď $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ takové, že $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a,b)$.
Platí:

(1) $f'(x) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$ pro všechna $x \in (a,b)$ $\boxed{\Longleftrightarrow}$ f je $\begin{cases} \text{neklesající} \\ \text{nerostoucí} \end{cases}$ v (a,b)

(2) Je-li $f'(x) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ —||— $\boxed{\Longrightarrow}$ f je $\begin{cases} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{cases}$ v (a,b).

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ $\boxed{\Longrightarrow}$ Je-li $x, y \in (a,b)$, pak $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \underset{\uparrow\ \text{LVOSH}}{=} f'(\xi_{x,y}) \geq 0$

což implikuje f je neklesající.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Je-li f neklesající v (a,b), pak pro $\forall x, y \in (a,b)$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0 \quad \text{tedy také} \quad \lim_{x \to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(y) \geq 0,$$ což dává tvrzení.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Podobně jako v důkazu $\boxed{\Longrightarrow}$ v (1); jen nerovnosti jsou ostré. ▨

POZOR! Funkce $f(x) = x^3$ je rostoucí v $\mathbb{R}$, ale $f'(x)$ není kladná ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$. Tedy opačné implikace v (2) NEPLATÍ.

Důsledkem Cauchyho věty o střední hodnotě jsou
(i) důkaz l'Hospitalova pravidla
(ii) tvar zbytku při rozvoji funkcí do Taylorových polynomů.
Viz konec semestru

Tuto sekci zakončíme formulací postačujících podmínek pro lokální extrémy.

Věta 4.13 (Lokální Extrémy – postačující podmínky). Nechť f je spojitá v x_0.

Platí:

(1)
$$\text{Je-li } f \left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\\ \text{nerostoucí}\\ \text{neklesající}\end{array}\right\} \text{ v } P_\delta^-(x_0) \text{ a } \left\{\begin{array}{l}\text{klesající}\\ \text{rostoucí}\\ \text{neklesající}\\ \text{nerostoucí}\end{array}\right\} \text{ v } P_\delta^+(x_0), \text{ pak má } f \text{ v } x_0 \left\{\begin{array}{l}\text{ostré maximum}\\ \text{ostré minimum}\\ \text{minimum}\\ \text{maximum}\end{array}\right.$$

(2)
$$\text{Je-li } f' \left\{\begin{array}{l}>0\\ <0\\ \leq 0\\ \geq 0\end{array}\right\} \text{ v } P_\delta^-(x_0) \text{ a } f' \left\{\begin{array}{l}<0\\ >0\\ \geq 0\\ \leq 0\end{array}\right\} \text{ v } P_\delta^+(x_0), \quad \text{—— " ——}$$

Dk (2) plyne z (1) a Věty 4.12.

Ad (1) plyne z definice.

Věta 4.14 Nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Pak platí:

(1a) Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak f má v x_0 ostré minimum

(1b) Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, —— " —— maximum.

(2a) Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in P_\delta^+(x_0)$ a $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in P_\delta^-(x_0)$.

(2b) Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak $\exists \delta > 0$ tak, že
$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) \text{ v } P_\delta^+(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \text{ v } P_\delta^-(x_0) \end{cases}$$

Dk Provedeme indukcí.

KROK 1 Je-li $n = 1$ a $f'(x_0) > 0$, pak $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ a (2a) platí (Situace pro $f'(x_0) < 0$ je podobná).

Je-li $n = 2$ a $f''(x_0) > 0$, pak $\exists \delta > 0$ tak, že
$$\begin{cases} f'(x) > f'(x_0) = 0 & \text{pro } x \in P_\delta^+(x_0) \\ f'(x) < f'(x_0) = 0 & \text{pro } x \in P_\delta^-(x_0) \end{cases}$$

tedy f je $\left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí v } P_\delta^+(x_0)\\ \text{klesající v } P_\delta^-(x_0)\end{array}\right\} \Rightarrow f$ má v x_0 minimum.

KROK 2 Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme jej pro $n+1$.

Je-li $(n+1)$ liché, pak $0 < f^{(n+1)}(x_0) = (f')^{(n)}(x_0)$ a dle indukčního předpokladu (n sudé) má f' v x_0 ostré minimum, tzn. $\exists \delta > 0$ tak, že $f'(x) > f'(x_0) \underset{\uparrow \text{ předpoklad věty}}{=} 0$ pro $\forall x \in P_\delta(x_0) \Rightarrow f$ rostoucí v $P_\delta(x_0)$.

Speciálně
$$\left\{\begin{array}{ll} f(x) > f(x_0) & \text{pro } x \in P_\delta^+(x_0) \\ f(x) < f(x_0) & \text{—"— } P_\delta^-(x_0) \end{array}\right\}.$$

Je-li $(n+1)$ sudé, postupujeme podobně. Zkuste sami. ∎

4.3 Konvexita (konvexnost), KONKÁVITA (konkávnost) FCE, KŘIVOST Grafu funkce

Definice Buď $J \subset \mathbb{R}$ interval a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že

f je na J $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{array} \right\}$ jestliže $\forall x, y, z \in J$ splňující $x < y < z$ platí:

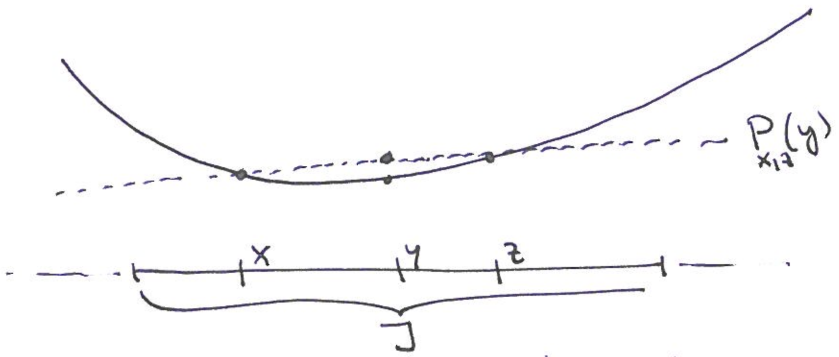
$$\boxed{f(y) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x)}$$

Jsou-li nerovnosti ostré, mluvíme o ryzí konvexitě či ryzí konkávitě.

- Podobně jako monotónie, ani konvexita/konkávita nevyžadují existenci derivací. Podobně jako u monotónie budeme zkoumat jak z existence derivací rozpoznat, kdy a kde je f konvexní či konkávní.
- Geometrické znázornění konvexity/konkávity funkce:

  Funkce $P_{x,z}(y) := f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x)$ popisuje přímku procházející body $(x, f(x))$ a $(z, f(z))$

  Funkce f je konvexní: $P_{x,z}(y) \geq f(y)$ pro všechna y ležící mezi x a z; a pro všechna $x, z \in J$.



- Jinou formulaci konvexity dostaneme tak, že y zapíšeme jako konvexní kombinaci x a z, tj. $y = \lambda x + (1 - \lambda) z \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$.

Pak f je konvexní v $J \overset{df.}{\equiv} f(\lambda x + (1-\lambda) z) \leq \underbrace{f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}[(\lambda - 1)x + (1 - \lambda) z]}_{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)}$

neboli

pro $x_1 = x$, $x_2 = z$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = (1 - \lambda)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in J \\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \langle 0, 1 \rangle \\ \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 1 \end{array}} : \boxed{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}$$

$\boxed{\text{Věta 4.15}}$ (Jensenova nerovnost) Buď $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Je-li f $\left\{\begin{matrix}\text{konvexní} \\ \text{konkávní}\end{matrix}\right\}$ v J, pak pro všechna $x_1, \dots, x_n \in J$ platí

$$(J) \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \boxed{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \left\{\begin{matrix} \leq \\ \\ \geq \end{matrix}\right\} \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Dk: matematickou indukcí

$\boxed{\text{Krok 1}}$ Pro $n=2$ je Jensenova $\leq$ (J) přímý důsledek definice konvexity, jak ukázáno výše.

$\boxed{\text{KROK 2}}$ Nechť (J) platí pro $n \in \mathbb{N}$. Ukažme, že platí pro $n+1$.

Platí:

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n+1})}_{\text{konvexita pro } n=2} \right\}$$

$$\geq (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n + \lambda_{n-1}} f(x_{n-1}) + f\left(\frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\right) \right\}$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\right)$$

$$\underset{\text{předpoklad}}{\overset{\text{Indukční}}{\geq}} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1})$$

Q.E.D.

Jedním a bezprostředních důsledků Jensenovy nerovnosti je tzv. AG-nerovnost

$\boxed{\text{Věta 4.16}}$ (AG $\leq$) Buď $n \in \mathbb{N}$, $a_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$.

Pak platí:

$$(AG) \qquad \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}_{\text{geometrický průměr}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}_{\text{aritmetický průměr}}$$

(BÚNO: $a_k > 0 \ \forall k$)

Dk: Protože je $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ rostoucí, stačí ukázat, že

$$\frac{1}{n} \log a_1 + \frac{1}{n} \log a_2 + \dots + \frac{1}{n} \log a_n \leq \ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)$$

což je však Jensenova nerovnost pro logaritmus pokud je logaritmus konkávní, což si ukážeme níže. ▨

Věta 4.17 (Další charakterizace konvexity) NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ JSOU EKVIVALENTNÍ

(i) f je konvexní na intervalu J

(ii) $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ pro $(\forall x,y,z \in J)$: $x<y<z$

(iii) $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ pro —— || ——

(iv) $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$ pro —— || ——

viz Obr 6 dole. Pro charakterizaci ryzí konvexity platí ostré nerovnosti.

Dk Definice konvexity říká, že pro $x<y<z$ je $\boxed{f(y) \leq P(y)}$

kde přímka $P(y)$ je dána vztahem

$$P(y) = f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{x-y}(y-x) \quad \text{ale také} \quad P(y) = f(z) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-z),$$

což implikuje ihned (ii) a (iv). Tvrzení (iii) plyne přímo z (ii) a (iv).
[je ekvivalentní s]

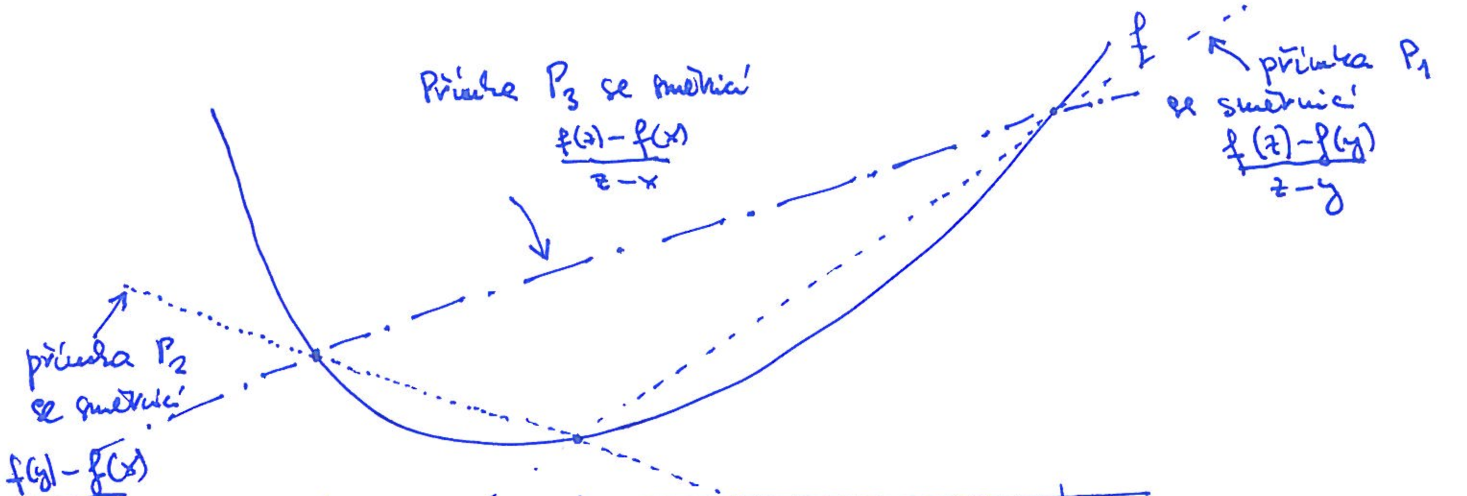
Zbývá ukázat, že (iii) $\Rightarrow$ konvexitu (např. (ii)). Avšak

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\cdot\big(z-x-(y-x)\big) \leq f(z)-f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) - \big(f(y)-f(x)\big) \leq f(z)-f(y) \Rightarrow f(z) \geq f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)$$

což je konvexita či (ii).

(i) ■



Obr. 6 Charakterizace konvexity určují nerovnosti mezi směrnicemi přímek P_1, P_2, P_3. Naopak z geometrické představy konvexity vztahy mezi směrnicemi přímek P_1, P_2, P_3 snadno plynou.

Nyní můžeme popsat (charakterizovat) konvexitu pomocí druhých derivací fce f (pokud tyto samozřejmě existují).

$\boxed{\text{Věta 4.18}}$ Nechť $f \in C(\langle a,b\rangle)$ a $f''(x)$ existují pro $\forall x \in (a,b)$. Pak

(i) f je na $\langle a,b\rangle$ $\left\{\begin{matrix}\text{konvexní}\\ \\ \text{konkávní}\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow f''(x) \left\{\begin{matrix}\geq 0\\ \\ \leq 0\end{matrix}\right.$ pro všechna $x \in (a,b)$.

(ii) Je-li $f''(x) \left\{\begin{matrix}> 0\\ \\ < 0\end{matrix}\right\}$ pro všechna $x \in (a,b)$, pak f je $\left\{\begin{matrix}\text{ryze konvexní}\\ \\ \text{ryze konkávní}\end{matrix}\right\}$ v $\langle a,b\rangle$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)} \Rightarrow}$ Protože f je konvexní na $\langle a,b\rangle$, tak pro libovolné $a \leq \alpha < x < y < \beta \leq b$ dle předchozí Věty 4.17 platí:

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \underbrace{\frac{f(y)-f(\beta)}{y-\beta}}.$$

Limitní přechody $x \to \alpha+$ a $y \to \beta-$ dostaneme

$$f'(\alpha) = f'(\alpha+) \leq f'(\beta-) = f'(\beta)$$

což znamená, že

$\forall \alpha, \beta \in (a,b): \quad f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ neboli f' je rostoucí v (a,b),

to je však dle Věty 4.12 ekvivalentní $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$; Q.E.D.

Je-li f konkávní, pak buď postupujeme podobně (ale s opačnými nerovnostmi) nebo přejdeme k fci $-f$, která je konvexní.

$\boxed{\text{Ad (i)} \Leftarrow \text{ a (ii)}}$ Je-li $f''(x) \left\{\begin{matrix}> 0\\ \\ \geq 0\end{matrix}\right\}$ v (a,b), pak dle Věty 4.12, je f' v (a,b) $\left\{\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \\ \text{neklesající}\end{matrix}\right\}$. Tedy pro $\forall \xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, $\xi_1 < \xi_2$, platí

$\left\{\begin{matrix} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)\\ f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)\end{matrix}\right\}$. Náš cíl je ukázat, že pro $(\forall x,y,z)$ $x<y<z$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \left\{\begin{matrix}<\\ \\ \leq\end{matrix}\right\} \frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

což však plyne z předchozího a z Lagrangeovy VOSH.

▨

Definice inflexního bodu (viz další strana dole)

Nyní máme k dispozici již všechny nástroje určené k vyšetřování průběhu funkcí. Vyšetřování průběhu fce $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ si můžeme rozdělit do čtyř částí:

(1) Zkoumání f samotné zahrnuje D_f, (obor hodnot R_f), speciální vlastnosti: sudá/lichá/periodická (což zužuje množinu, kde musím f zkoumat), limity v krajních bodech D_f, body spojitosti, význačné body (např. nulové body, singularity) náčrtek situace.

(2) Zkoumání intervalů monotónie f, lokálních extrémů, pomocí f', což zahrnuje $D_{f'}$, výpočet f', $\lim f'$ v krajních bodech $D_{f'}$ (kde je f spojitá), určení lokálních, globálních extrémů.

Je-li okolí $+\infty$ nebo okolí $-\infty$ podmnožinou D_f, je třeba rozhodnout, zda f se neblíží v $+\infty$ nebo $-\infty$ k asymptotě, což jsou lineární funkce $ax+b$ resp. $\alpha x+\beta$ splňující

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(\alpha x+\beta)\big)=0$$

Pokud f' existuje v okolí $+\infty$ či $-\infty$, platí

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = a \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \alpha.$$

Doplním náčrtek.

(3) Zkoumání intervalů, kdy je f konvexní/konkávní, také inflexních bodů, pomocí f'', což zahrnuje $D_{f''}$, výpočet f'', určení intervalů, kdy f'' nemění znaménko

(4) Nakreslení pěkného grafu zahrnující tabulku význačných bodů a odpovídajících funkčních hodnot.

Def. Řekneme, že bod $\boxed{x_0 \in D_f}$ je inflexní bod, jestliže fce f v tomto bodě přechází z konkávní na konvexní či naopak, tzn. $\exists\, \delta > 0$ tak, že

- buď f je konkávní v $P^-_\delta(x_0)$ a f je konvexní v $P^+_\delta(x_0)$
- nebo f je konvexní v $P^+_\delta(x_0)$ a f je konkávní v $P^+_\delta(x_0)$.

Platí. Je-li x_0 inflexní bod a $f''(x_0)$ existuje $\Rightarrow f''(x_0)=0$

! Neplatí. Je-li $f''(x_0)=0$, pak x_0 je inflexní (viz. např. $f(x)=x^4$ v $x_0=0$).

Příklady (1) Vyšetřete průběh fce $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

Řešení

[1] $D_{\arcsin} = \langle -1,1\rangle$ a $H_{\arcsin} = \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$, $\arcsin \in C(\langle -1,1\rangle)$, lichá fce.

Protože
$$\frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \iff (x+1)^2 \geq 0$$
$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff (x-1)^2 \geq 0$$
což platí vždy a rovnost nastane pro $x = \pm 1$.

tak $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$ navíc:

x	-1	0	1
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

• Dále:
$$f(-x) = \arcsin \frac{-2x}{(1+(-x)^2)} = -\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = f(x)$$
, kde jsme využili lichosti fce arcsin.

Tedy f je lichá a stačí vyšetřovat f na $\boxed{\langle 0,+\infty)}$.

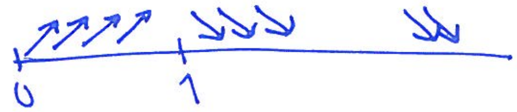
• Také
$$\frac{2x}{1+x^2} \to 0+ \text{ pro } x \to +\infty \text{ a tak } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+$$

• Protože $\frac{2x}{1+x^2} \in C(\mathbb{R})$ a $\arcsin \in C(\langle -1,1\rangle)$ tak $f \in C(\mathbb{R})$.

Náčrtek: 

[2] Monotónie, lok. extrém

• $D_{f'} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ a tady
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(2x)^2}{(1+x^2)^2}}}\,\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\,(1+x^2)} = \frac{2(1-x^2)}{|(1-x^2)|}\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} \quad \begin{matrix} >0 & x\in(0,1) \\ <0 & x\in(1,+\infty) \end{matrix}$$

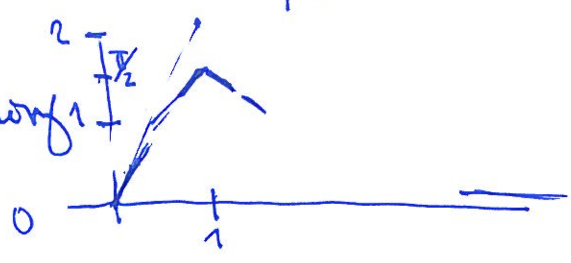
Tedy 

• Protože je f spojitá v $\{0\}$ a v $\{1\}$,
tak $f'(0+) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} = \underline{2}$

a $f'(1\pm) = \lim_{x\to 1\pm} f'(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)} = \underline{\mp 1}$

a $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

• v $\{1\}$ je lokální extrém, protože však $f(1) = \frac{\pi}{2}$ je to i maximum globální.

Náčrtek doplněný 

• Asymptota:
$\boxed{y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

[3] Intervaly konvexity/konkávity

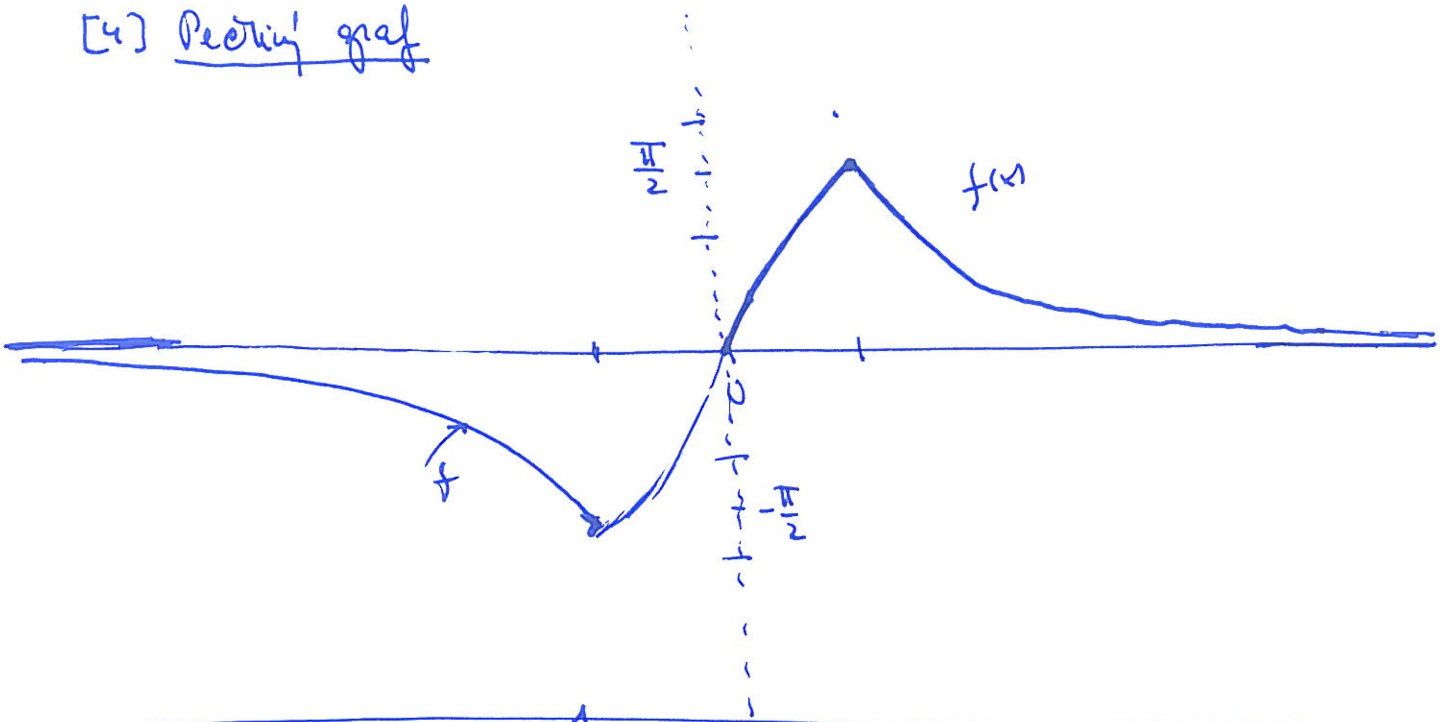
· $D_{f''} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ a $f''(x) = -2 \dfrac{\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}(2x)$

$$= -4x \frac{\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \begin{cases} < 0 \text{ v } (0,1) \\ > 0 \text{ v } (1,+\infty) \end{cases}$$

Tedy f je konkávní v $(0,1)$ a konvexní v $(1,+\infty)$

body 1 i 0 jsou inflexní.

[4] Přibližný graf



---

(2) Uvažujte fci $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$. Tedy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_0$.

Načrtněte graf fce. Zkoumejte spojitost a spojitost všech derivací f v $\mathbb{R}$.

Řešení · f je definována pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1-x^2} \in C(\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$,

ale $\lim\limits_{\substack{x \to 1- \\ x \to -1+}} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \underset{\text{spoj. exp.}}{=} \exp \lim\limits_{\substack{x \to 1- \\ x \to -1+}} \frac{-1}{1-x^2} = 0+ \overset{}{=} f(\pm 1) \Rightarrow f \in C(\mathbb{R})$

· $f(0) = \frac{1}{e} > 0$, f je sudá

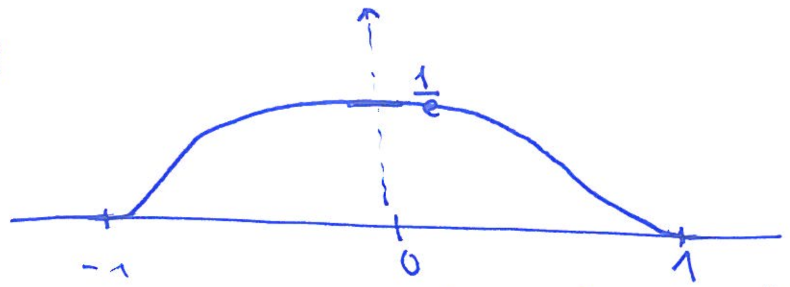
· $f'(x)$ v $(0,1)$ má tvar $f'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2}\{-2x\} = \dfrac{-2x\, e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2} < 0.$

Tedy f je v $(0,1)$ klesající.

Navíc $\lim\limits_{x \to 1-} f'(x) = -2 \lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2} \underset{z = \frac{1}{1-x^2}}{=} -2 \lim\limits_{z \to +\infty} z^2 e^{-z} = -2 \lim\limits_{z \to +\infty} \dfrac{z^2}{e^z}$

$= 0$ tedy $f' \in C(\mathbb{R})$

Náčrtek



Dá se ukázat, že na libovolnou derivaci (tj. pro derivaci k-tého řádu, kde $k \in \mathbb{N}$ je libovolné) platí: $f^{(k)}(x) \in C(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Definice}}$ (prostory spojitých, spojitě diferencovatelných a ∞-spojitě diferencovatelných funkcí).

Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. Označujeme

$$C(M) \overset{\text{df.}}{=} \{ f : M \to \mathbb{R} \text{ (nebo } \mathbb{C}) ;\ f \text{ je spojitá v } M \}$$

$$(k \in \mathbb{N}) \quad C^k(M) \overset{\text{df}}{=} \{ f : M \to \mathbb{R} \text{ (nebo } \mathbb{C}) ;\ f^{(i)} \in C(M) \text{ pro } i = 0, 1, \dots, k \}$$

$$C^\infty(M) \overset{\text{df.}}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^k(M)$$

Úmluva: $C(M) = C^0(M)$
značí totéž | ztotožnění IDENTIFICATION

Cvičení Ukažte, že prostory $C^k(M)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$, jsou vektorové (či lineární) prostory, kde operace "sčítání" je definována

$$(f+g)(x) \overset{\text{df}}{=} f(x) + g(x)$$

a operace "násobení skalárem" je definována

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C}.$$

Návod: Ověřte, že $f+g, \alpha f \in C^k(M)$ jsou-li $f, g \in C^k(M)$.

Příklady
- Fce $\exp, \sin, \cos, \operatorname{arctg} \in C^\infty(\mathbb{R})$, fce $\ln \in C^\infty((0,+\infty))$.
- Fce $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pro } |x|<1 \\ 0 & \text{pro } |x| \geq 1 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$ přitom je tato funkce nenulová jen na $(-1,1)$. Tato funkce bude mít v budoucnu významnou roli.

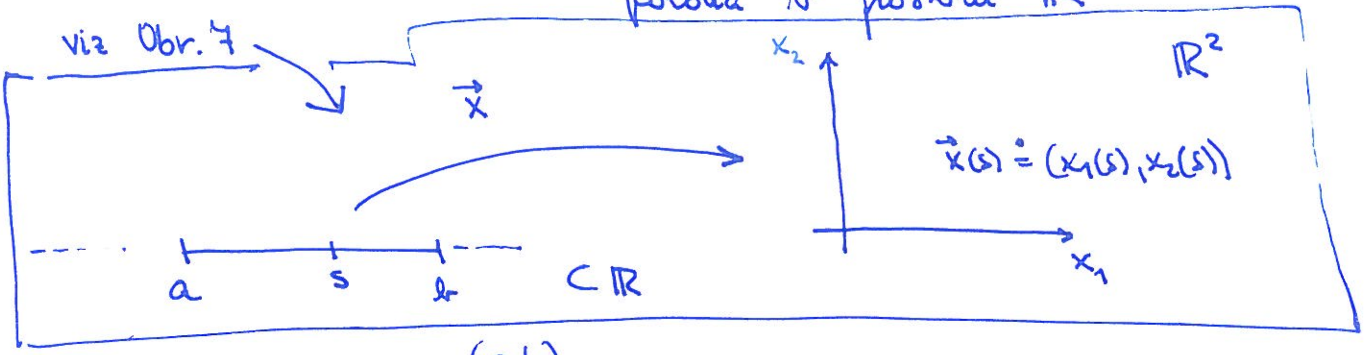
- Křivka, tečný vektor (rychlost), křivost, rovnice tečny a normály

- **Křivka** je zobrazení intervalu (a,b) do $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tzn.

$$\vec{x} : (a,b) \longrightarrow \vec{x} : (x_1, \dots, x_k)$$

$$s \longmapsto \underbrace{(x_1(s), \dots, x_k(s))}_{\text{poloha v prostoru } \mathbb{R}^k}$$

viz Obr. 7



Funkce $s \in (a,b) \longmapsto x_1(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

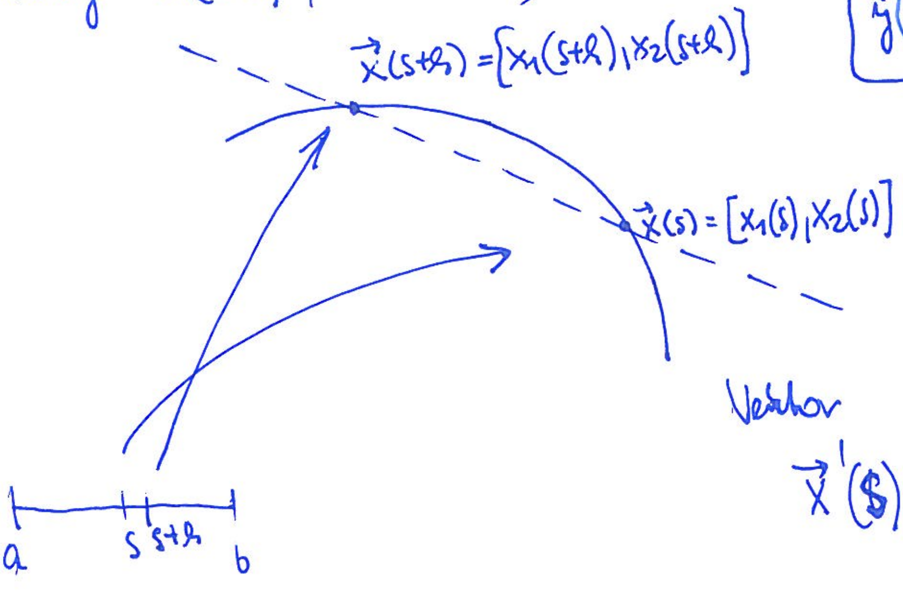
$\vdots$

$s \longmapsto x_k(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Je-li (a,b) časový interval, pak $\vec{x}(s)$ udává polohu částice (hmotného bodu) v čase s. Obvykle se "a" ztotožní s počátkem měření a (a,b) se změní $(0,T)$, $T>0$ je konečný čas měření. V tomto případě se $\vec{x}$ nazývá trajektorie nebo pohyb (motion)

- Buď $\vec{x} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dáno. Přímka, procházející body $\vec{x}(s)$ a body $\vec{x}(s+h)$, viz obrázek, má tvar

$$\boxed{\vec{y}(t) = \vec{x}(s) + \frac{\vec{x}(s+h) - \vec{x}(s)}{h}(t)}$$



Se zmenšujícím se h dostáváme tečnu

$$\boxed{\vec{y}(t) \doteq \vec{x}(s) + \vec{x}'(s)\, t}$$

Vektor $\vec{x}'(s) \doteq \begin{pmatrix} x_1'(s) \\ \vdots \\ x_k'(s) \end{pmatrix}$ se nazývá **tečný vektor**

[• Je-li s čas a $\vec{x}(s)$ poloha, pak $\vec{x}'(s)$ se nazývá vektor okamžité rychlosti částice v čase s. Často se píše (používá se nejednotné značení)

$$\vec{v}(s) = \vec{x}'(s) = \dot{\vec{x}}(s) = \frac{d\vec{x}}{ds}(s).$$
]

$\boxed{\text{Je-li } k=2}$, lze z parametrické rovnice $\vec{y}(t) = \vec{x}(s) + \vec{x}'(s)\,t$, sestavit rovnici tečny v obecném implicitním tvaru $Ay_1 + By_2 + C = 0$.

Vskutku:

$$\underbrace{\frac{y_1(t) - x_1(s)}{x_1'(s)}} = t = \underbrace{\frac{y_2(t) - x_2(s)}{x_2'(s)}}$$

implikuje

$$\boxed{\big(y_1(t) - x_1(s)\big)x_2'(s) - \big(y_2(t) - x_2(s)\big)x_1'(s) = 0}$$

což lze zapsat ve tvaru

$$\big(\vec{y}(t) - \vec{x}(s)\big)\cdot\vec{n}(s) = 0 \quad \text{nebo} \quad \boxed{\big(\vec{y} - \vec{x}\big)\cdot\vec{n} = 0},$$

kde $\vec{y}-\vec{x} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_2' \\ -x_1' \end{pmatrix}$ je normálový vektor ke křivce $\vec{x}$ v bodě $\vec{x}(s)$.

Rovnice $(\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{n} = 0$ je obecná rovnice tečny: množina všech bodů takových, že polohový vektor $\vec{y}-\vec{x}$ je kolmý na vektor $\vec{n}$ (který je pak normálový k tečně.).

Pozorujme, že $\vec{n}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2'(s) \\ -x_1'(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'(s) \\ x_2'(s) \end{pmatrix} = 0$

Speciálním případem křivky v rovině je graf funkce $y = f(x)$.

Pak $\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} s \\ f(s) \end{pmatrix}$ a $\vec{x}'(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(s) \end{pmatrix}$ a $\vec{n} = \begin{pmatrix} f'(s) \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} s \\ f(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ f'(s) \end{pmatrix} t \iff \boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= s + t \\ y_2(t) &= f(s) + f'(s)\,t \end{aligned}}$$

neboli $\boxed{y_2(t) = f(s) + f'(s)(y_1(t) - s)}$

$$\boxed{y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Semestrální kurs NOFY151 zakončíme důkazem l'Hospitalovy věty, viz Věta 3.7. Pro úplnost znění zopakujeme.

$\boxed{\text{Věta 3.7 (l'Hospitalova)}}$ (případy $\frac{\infty}{\infty}, \frac{A}{\infty}, \frac{0}{0}$). Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť

(1) $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že pro $\forall x \in P_\delta(x_0)$ existují $f'(x), g'(x)$ a $g'(x) \neq 0$,

(2) Existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a rovná se $A \in \mathbb{R}^*$

(3) Platí jedna z podmínek:

(i) Buď $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

(ii) Nebo $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existuje a rovná se A.

Dk $\boxed{\text{KROK 1}}$ Nejdříve ukážeme, že stačí tvrzení dokázat $\underline{\underline{x_0 \in \mathbb{R}}}$ a pro případ $\boxed{x \to x_0+}$.

1. Platí-li věta pro jednostranné limity (se stejným A), pak platí i pro oboustranné limity

2. (i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} f(-y)$ a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} g(-y)$
a také
$$\lim_{y \to +\infty} \frac{(f(-y))'}{(g(-y))'} = \lim_{y \to +\infty} \frac{-f'(-y)}{-g'(-y)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{f'(-y)}{g'(-y)}$$
Odsud plyne, že případ $x \to -\infty$ lze převést na případ $y \to +\infty$

(ii) Podobně pro $x_0 \in \mathbb{R}$, lze $\lim\limits_{x \to x_0-}$ převést na $\lim\limits_{y \to x_0+} f(y)$.

3. Protože $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ a také pro g
a také
$$\lim_{y \to 0+} \frac{\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{y}\right)\right)'} = \lim_{y \to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
Odsud plyne, že případ $x \to +\infty$ se převede na $y \to 0+$.

$\boxed{\text{KROK 2}}$ Nechť platí $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} g(x) = 0}$

Položme/předefinujme $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Pak $f, g \in C(\langle x_0, x_0+\delta))$ a $f'(x), g'(x) \neq 0$ existují v $(x_0, x_0+\delta)$. Dle Cauchyho věty o střední hodnotě Věta 4.10 existuje $\xi \in (x_0, x)$ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ a navíc pro $x \to x_0+$ platí $\xi \to x_0+$

Odsud
$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

$\boxed{\text{KROK 3}}$ Nechť platí $\boxed{(\bullet)\ \lim_{x\to x_0+} |g(x)| = +\infty}$

Opět potvrzujeme, že existuje $\delta>0$ tak, že $f'(x)$ a $g'(x)\neq 0$ existují na $(x_0, x_0+\delta)$ a navíc plyne z $(\bullet)$ že také $g(x)\neq 0$ na $(x_0,x_0+\delta)$. Pro libovolné body $x,y \in (x_0, x_0+\delta)$ lze opět použít Cauchy VOSH Věta 4.10: $\boxed{x<y}$

$$\exists\, \xi = \xi_{x,y} \in (x,y): \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$$

což implikuje
$$f(x) = f(y) + (g(x)-g(y))\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \underset{\frac{1}{g(x)}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\bullet\bullet)}$$

Z identity $(\bullet\bullet)$ dokážeme tvrzení. Musíme však rozlišit případy $\boxed{A=0}$, $\boxed{A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, $\boxed{A=+\infty}$ a $\boxed{A=-\infty}$.

$\boxed{\text{Podkrok } A=0}$ Protože $\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, tak k $\varepsilon>0$ $(\exists P(x_0))(\forall x\in P(x_0))$ $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Protože $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$, tak pro y zafixované najdeme x blízko x_0 tak, že $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ a $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}$. Pak $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\boxed{\text{Podkrok } A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ Definujme $F(x) = f(x) - Ag(x)$. Pak $\lim_{x\to x_0+}\frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} - A = 0$, a dle předchozího Podkroku plyne $\lim_{x\to x_0+}\frac{F(x)}{g(x)} = 0$, což implikuje $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$.

$\boxed{\text{Podkrok } A=+\infty}$ K $L>0$ libovolnému najdeme $P^+_\delta(x_0)$ tak, že $\frac{f'(x)}{g'(x)} > L$ pro všechna $x\in P^+_\delta(x_0)$. Vezmi $y\in P^+_\delta(x_0)$ a uvaž stejné podmínky na $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$ a $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|$ jak jsou uvedeny v $\boxed{\text{Podkroku } A=0}$.

Pak z $(\bullet\bullet)$
$$\frac{f(x)}{g(x)} > -\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2}L =: M$$, což dává tvrzení.

$\boxed{\text{Podkrok } A=-\infty}$ se dokáže podobně. Q.E.D.