1.3 DERIVACE

Def. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ a nechť existuje $\mathcal{U}(x) \subset D_f$.

- Řekneme, že

$$f \text{ má v } x \text{ derivaci} \overset{\text{df.}}{\equiv} \text{ existuje } \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Tuto limitu značíme $\boxed{f'(x) \text{ nebo } \frac{df}{dx}(x).}$

- Řekneme, že

$$f \text{ má v } x \text{ derivaci } \begin{Bmatrix} \text{zprava} \\ \text{zleva} \end{Bmatrix}, \text{ značíme } \begin{Bmatrix} f'_+(x) \\ f'_-(x) \end{Bmatrix}, \text{ existuje-li } \begin{cases} \lim_{z \to x+} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \\ \lim_{z \to x-} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \end{cases}$$

Důležité pozorování (a) Označme $h := z - x$. Pak $z = x + h$ a

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} D_h f(x) \quad \text{kde}$$

$$D_h f(x) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{diferenční podíl } f \text{ v bodě } x.$$

(b) Také se někdy používá $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ a $\Delta x = h$. Pak $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ a máme

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$$

Pozor Δ zde značí přírůstek. Neplést s Laplaceovým operátorem (bude za týden).

My se značení v (b) budeme vyhýbat!

Má-li funkce v x_0 derivaci, pak je v x_0 určitě omezená, jak plyne z následující věty.

Věta 12 ($f'(x) \Rightarrow f$ je spojitá v x). Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Pokud $f'(x)$ existuje, pak je f spojitá v x.

(Dk) Protože $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existuje, tak dle Věty 5 je $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ omezená v jistém okolí 0. Tedy $(\exists \delta > 0)(\exists M > 0)$ tak, že pro $(\forall h, 0 \neq |h| \leq \delta)$ $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| < M$, neboli

$$|f(x+h) - f(x)| < M|h|,$$ což implikuje spojitost f v x. $\square$

Věta 13 (o derivaci součtu, součinu, podílu) Nechť existují $f'(x), g'(x)$. Pak platí: (1) ex. $(f+g)'(x)$ a $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(2) ex. $(fg)'(x)$ a $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) Je-li navíc $g(x) \neq 0$, pak ex. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$ a $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ Protože

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

a limity výrazů vpravo existují, tak dle Věty 6 o limitě součtu dostáváme tvrzení (1). Samozřejmě jsme využili definici derivace.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Postupujeme podobně. Protože

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) g(x+h) + f(x)\left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$$

a limity diferenčních podílů vpravo existují a dle Věty 12 $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, tak s pomocí Věty 6 dostáváme tvrzení (2).

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Stačí ukázat, že $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$. Proč? *)

Avšak

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\,\frac{1}{g(x+h)\,g(x)}$$

a opět využijeme Věty 6 o limitě podílu, Větu 12 o spojitosti g v x, atd. ∎

Věta 14 (o derivování složené funkce neboli řetízkové pravidlo)
Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takové, že $f'(x)$ a $g'(f(x)) := g'(y)\big|_{y=f(x)}$ existují. Pak

$$(\blacktriangle) \qquad (g \circ f)'(x) = \left[g(f(x))\right]' = g'(f(x))\, f'(x)$$

ŘETÍZEK

Obecněji, máme-li $h(x) := f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(x))))) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5)(x)$,
pak

$$h'(x) = f_1'(f_2(f_3(f_4(f_5(x))))) \, f_2'(f_3(f_4(f_5(x)))) \, f_3'(f_4(f_5(x))) \, f_4'(f_5(x)) \, f_5'(x).$$

$$= f_1'(z)\Big|_{z=(f_2\circ f_3\circ f_4\circ f_5)(x)} \cdot f_2'(w)\Big|_{w=(f_3\circ f_4\circ f_5)(x)} \cdot f_3'(\xi)\Big|_{\xi=(f_4\circ f_5)(x)} \cdot f_4'(t)\Big|_{t=f_5(x)} \cdot f_5'(x)$$

$\boxed{\text{MÍSTO 5-ti fcí LZE VZÍT JAKÝKOLIV KONEČNÝ POČET.}}$

*) Protože na výraz $f \cdot \frac{1}{g}$ můžeme pak použít již dokázané tvrzení (2) o derivování součinu: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\,\frac{1}{g}\right)' = f'\,\frac{1}{g} - f\,\frac{g'}{g^2} = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

$\boxed{\text{Dk} \mid \text{Věty } 14}$ Chceme ověřit (▲). Opět vyjdeme z jednoduché úpravy pro diferenční podíl:

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\;\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =: (*)$$

Problém máme se jmenovatelem $f(x+h)-f(x)$; nevíme zda je nenulový. Když byl, pak označme $y := f(x+h)-f(x) \Leftrightarrow f(x+h)=f(x)+y$ a $(*)$ lze přepsat jako

$$(*) = \frac{g(f(x)+y)-g(f(x))}{y}\;\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

což už by dalo výsledek, neb pro $h\to 0$ platí $f(x+h)-f(x)=y \overset{\neq 0}{\to} 0$ a dle V6 a z existence limit vpravo bychom dostali tvrzení.
Problém vyřešíme takto. Definujme pomocnou funkci

$$h(y) := \begin{cases} \dfrac{g(f(x)+y)-g(f(x))}{y} & \text{pro } y\neq 0 \\ g'(f(x)) & \text{pro } y=0 \end{cases}$$

Pak z předchozího víme, že pro $y\neq 0$:

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = h(y)\;\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Z definice h plyne, že h je spojitá v 0 $\left(\lim_{y\to 0} h(y) = g'(f(x)) = h(0)\right)$.
Tedy pro $h\to 0$ máme $y\to 0$ a $\lim_{y\to 0} h(y) = g'(f(x))$ a $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$,

což implikuje tvrzení. ☒

<u>Příklady</u> 1) $f(x)=x \Rightarrow f'(x) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$

2) $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x) = (x\cdot x)' \overset{V12}{=} 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x$

Indukcí dokážeme, že pro $f(x)=x^n$ platí $f'(x)=nx^{n-1}$

$$(x^{n+1})' = (x^n\cdot x)' = nx^{n-1}\cdot x + x^n = (n+1)x^n$$

3) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad$ Pak $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

a obecněji $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \left(x^{-m}\right)' = -m x^{-m-1} = -\frac{m}{x^{m+1}}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{x;\, x^7+1=0\}$ 4) Umíme derivovat racionální funkce: $\left(\frac{x^4+2}{x^7+1}\right)' = \frac{4x^3(x^7+1)-7(x^4+2)x^6}{(x^7+1)^2}$

5) Také $\left[\left(x^2+3x+1\right)^2\right]' = \left(y^2\big|_{y=x^2+3x+1}\right)' = \underline{\underline{2(x^2+3x+1)(2x+3)}}$

dle řetízkového pravidla.

Věta 15 <u>O derivaci inverzní funkce</u> <u>Buď</u> $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taková, že

(i) existují $\alpha, \beta_1, \beta_2 > 0$ tak, že $f: (x-\alpha, x+\alpha) \xrightarrow{\text{na}} (f(x)-\beta_1, f(x)+\beta_2)$

(ii) existuje $f'(x)$ a $f'(x) \neq 0$

(iii) f^{-1}, jejíž existence plyne z (i), je spojitá v $y = f(x)$.

<u>Pak</u> existuje $(f^{-1})'(f(x))$ nebo $(f^{-1})'(y)$, kde $y = f(x)$

a platí

(*) $$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \iff (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

kde $y = f(x)$.

<u>Poznámka</u> Uvedeme chybný důkaz, který však umožňuje snadné zapamatování vzorečků (*).

Z (i) plyne vztah

(1) $$[f^{-1} \circ f](z) = z \quad \text{pro } z \in (x-\alpha, x+\alpha)$$

a také

(1') $$[f \circ f^{-1}](y) = y \quad \text{pro } y \in (f(x)-\beta_1, f(x)+\beta_2)$$

Zderivujeme-li (1) a (1') dle Věty 14 (složené zobrazení), pak

$$[f^{-1}]'(f(z))\, f'(z) = 1 \quad \text{a} \quad f'(f^{-1}(y))\,(f^{-1})'(y) = 1$$

což po vydělení $f'(z)$ resp. $f'(f^{-1}(y))$ dává vzorečky.

Proč je tento důkaz nesprávný? Ano, správně, Větu 14 nelze použít, neboť nevíme, že $(f^{-1})'(y)$ existuje.

<u>Příklad</u> $x^{\frac{1}{p}}$ je inverzní funkce k y^p na $D_f = \mathbb{R}$ je-li p liché, $D_f = \langle 0, \infty)$ je-li p sudé. $p \in \mathbb{N}$

Dle (*)

$$\underline{\underline{\left(x^{\frac{1}{p}}\right)'}} = \frac{1}{(y^p)'\big|_{y = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{p}}}} = \frac{1}{p\, y^{p-1}\big|_{y = x^{\frac{1}{p}}}}$$

$$= \frac{1}{p\, x^{\frac{p-1}{p}}} = \underline{\underline{\frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}}}$$

Kombinací vět o derivaci součinu tak dostáváme, že

$$\boxed{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}} \quad \boxed{p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}}$$

$\boxed{\text{Důkaz Věty 15}}$ Z předpokladu (iii) plyne, ve spojení s Větou 5, existence $P_\delta(x)$ tak, že

$$(\Delta) \qquad \left|\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| \geq \frac{|f'(x)|}{2} > 0 \qquad \text{pro } \forall z \in P_\delta(x).$$

Pro tato $z \in P_\delta(x)$ definujme

$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{z-x}{f(z)-f(x)} & z \neq x \\[2ex] \dfrac{1}{f'(x)} & z = x \end{cases}$$

Díky (Δ) je tato definice korektní, neboli $D_h = P_\delta(x)$, a navíc h je spojitá v x, $h(z) \to \dfrac{1}{f'(x)}$ pro $z \to x$.

Platí

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \lim_{y \to f(x)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x))}{y - f(x)} = \lim_{y \to f(x)} h\left(f^{-1}(y)\right)$$

$$\overset{\text{Věta 10}}{=} h\left(\lim_{y \to f(x)} f^{-1}(y)\right) \overset{(iii)}{=} h\Big(\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{x}\Big) \underset{\text{definice } h}{=} \frac{1}{f'(x)}.$$

Tak jsme ukázali, že derivace f^{-1} v $f(x)$ existuje a zároveň jsme ukázali platnost vztahu (*). ∎

Třetí předpoklad Věty 15 se obecně těžko ověřuje. Často však budeme moci nahradit předpoklady (i)-(iii) předpokladem jediným. Platí totiž toto tvrzení.

<u>Věta 15*</u> Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ splňuje, pro všechna $x \in (a,b)$, jednu z následujících podmínek

Buď $(\forall x \in (a,b))\ f'(x) > 0$ nebo $\forall x \in (a,b)\ f'(x) < 0$

Pak tvrzení věty 15 platí, tj. existuje $(f^{-1})'(y)$ pro $\forall y \in (f(a); f(b))$ a platí vztahy (*) a (**).

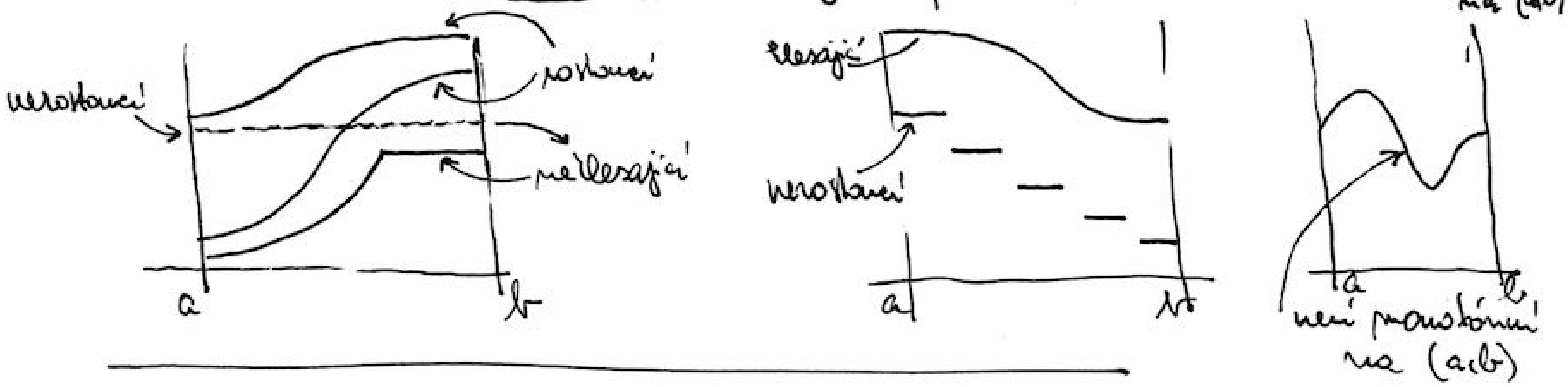
Dříve než Větu 15* okomentujeme (její důkaz provedeme později), uveďme definice pojmů <u>monotónie</u> resp. <u>ryzí monotónie</u>.

Definice Řekneme, že $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ je

$$\left.\begin{cases}\text{rostoucí}\\ \text{neklesající}\\ \text{nerostoucí}\\ \text{klesající}\end{cases}\right\}\ \text{v } (a,b) \text{ jestliže pro každé } x_1,x_2\in(a,b) \text{ platí: } x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1)<f(x_2)\\ f(x_1)\leq f(x_2)\\ f(x_1)\geq f(x_2)\\ f(x_1)>f(x_2)\end{cases}$$

Řekneme, že f je ryze monotónní (na (a,b)) je-li f buď klesající nebo rostoucí na (a,b)

—||— f je monotónní je-li f buď neklesající nebo nerostoucí na (a,b)



KOMENTÁŘ K DŮKAZU VĚTY 15* Platí následující implikace:

- Je-li $f'(x)\begin{cases}>0\\<0\end{cases}$ pro $\forall x\in(a,b)$, pak $\begin{cases}\text{(Věta 12)} & f \text{ je spojitá v } x\\ \boxed{\text{Věta 4.13}} & f \text{ je } \left.\begin{cases}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{cases}\right\} \text{na } (a,b)\end{cases}$

- Je-li f spojitá a $\left.\begin{cases}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{cases}\right\}$ na (a,b), pak $\begin{cases} f:(a,b)\xrightarrow{\text{na}}(f(a),f(b)) \text{ prostě}\\ f:(a,b)\xrightarrow{\text{na}}(f(b),f(a)) \text{ prostě}\end{cases}$

  a tedy f^{-1} existuje a zobrazuje $(f(a);f(b))\xrightarrow{\text{na}}(a,b)$ prostě

- Je-li f $\left.\begin{cases}\text{ryze monotónní}\\ \text{spojité}\end{cases}\right\}$ na (a,b), pak f^{-1} je $\left.\begin{cases}\text{ryze monotónní}\\ \text{spojité}\end{cases}\right\}$ na $(f(a);f(b))$ $\boxed{\text{Věta 4.6}}$

Tedy předpoklad $f'(x)\begin{cases}>0\\<0\end{cases}$ na (a,b) implikuje nejen předpoklad (ii) ve Větě 15, ale zaručuje i existenci f^{-1} a její spojitost v $(f(a);f(b))$. Věta 15* je tak důsledkem V15 a Vět 4.6 a 4.13, které si dokážeme později.