$\boxed{\text{DÚ4}}$

$\boxed{\text{Jonáš Dujava}}$

① (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{x^2\exp(-n^2x^2)}_{f_n(x)}$ na $[0,\infty)$. Platí $(x^2 e^{-n^2x^2})' = 2xe^{-n^2x^2} - x^2 e^{-n^2x^2}\,2n^2x$

$-0{,}1$ $= 2xe^{-n^2x^2}(1-n^2x^2)$

takže funkcia $f_n(x)$ je rastúca na $[0,\frac{1}{n}]$ a klesajúca na $[\frac{1}{n},\infty)$, čiže má ~~glob.~~ max. v $\boxed{x_n = \frac{1}{n}}$. Dostávame teda ($f_n$ sú nezáporné)

$|f_n(x)| \leq f_n(x_n) = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2}{n^2}} = \frac{e^{-1}}{n^2} < \frac{1}{n^2}$, čo je číselná rada, kt. konverguje (integrálne kritérium), takže podľa Weierstrassovho krit.

(a) $\boxed{\text{konverguje stejnoměrne na } [0,\infty)}$. (Takže aj bodovo)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{x\exp(-n^2x^2)}_{f_n}$ pre $\boxed{x=0}$ $\boxed{\text{konverguje bodovo}}$ triviálne

pre $\boxed{x\in(0,\infty)}$ $\boxed{\text{konverguje bodovo}}$ podľa lim. srov. krit

(f_n nezáporné na $[0,\infty)$) preto že $\frac{x\exp(-n^2x^2)}{\frac{1}{n^2}} = x\,n^2\exp(-n^2x^2) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Platí $(f_n)' = e^{-n^2x^2}(1-2n^2x^2) \Rightarrow$ glob. max. v $\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{2}\,n}}$

Ak pracujeme na intervale $[\delta,\infty)$, $\delta>0$ ľubovoľné, je od určitého n_0 glob. maximum $x_n<\delta$, takže (z monotónnosti na $[x_n,\infty)$)

$\forall n>n_0\ \forall x\in[\delta,\infty)\ |f_n(x)| \leq \sup_{x\in[\delta,\infty)} f_n(x) = f_n(\delta)$, čo je číselná post. kt. konverguje (vďaka bodovej konvergencii $f_n(x)$). Máme teda

$\boxed{\forall\delta>0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [\delta,\infty), \text{ resp. } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} (0,\infty)}$

Ukážeme, že $\sum f_n$ $\boxed{\text{nekonverguje stejnoměrne}}$ na $(0,\infty)$ (ani $[0,\infty)$)

~~čím sme dokázali negáciu B-C podmienky~~

$$\sum_{n=n_0+1}^{2n_0} f_n(x) \overset{\text{volíme } x=\frac{1}{n_0}}{=} \sum_{n=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{n_0} e^{-\frac{n^2}{n_0^2}} \geq \sum_{n=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{n_0} e^{-\frac{(2n_0)^2}{n_0^2}} = n_0 \frac{1}{n_0} e^{-4} = e^{-4}$$

čím sme dokázali negáciu B-C podmienky. ✓

$\boxed{2}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+x^2} \cos(nx) \arctan(nx)$ na $[-1,1]$.

Platí $|x^{2n}| \le 1$ (monotónna)

$\left|\frac{1}{n+x^2}\right| \le 1$ (1)

(monotónna) $|\arctan(nx)| \le \frac{\pi}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1,1]$

(~~stejné~~ stejnoměrně omezené) ?

(2)

$\sum\limits_{n=1}^{N} \cos(nx)$ stejné stej omez

$\boxed{\delta>0}$ na $[-1,\delta] \cup [\delta,1]$ ✓

Budeme pracovať na $X_1 \equiv \{x;\ |x| > \frac{1}{2}\}$ a $X_2 \equiv \{x;\ |x| \le \frac{1}{2}\}$

Keďže $x \in [-1,1] \Rightarrow x^2 \in [0,1]$,

$\Rightarrow n+x^2 < n+1+x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1+x^2} < \frac{1}{n+x^2} \le \frac{1}{n+1}$

(monotónna postup.) a (3)

$\frac{1}{n+x^2} \rightrightarrows 0$

Na $\boxed{X_1}$ máme splnené (1), (2) a (3), takže $\boxed{\text{Dirichlet}} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(nx)}{n+x^2}}_{a_n}$ KS

$\Rightarrow \boxed{\text{ABEL}} \Rightarrow \sum \underbrace{\frac{\cos(nx)}{n+x^2}}_{b_n} \underbrace{\arctan(nx)}_{a_n}$ KS

$\Rightarrow \boxed{\text{ABEL}} \Rightarrow \sum \underbrace{x^{2n}}_{a_n} \underbrace{\frac{\cos(nx)}{n+x^2}\arctan(nx)}_{b_n}$ $\boxed{\text{KS}}$

Na $\boxed{X_2}$ nemáme splnené (2) ale platí ($|x| \le \frac{1}{2}$)

$|x^{2n}\cos(nx)| \le x^{2n} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$, geom. post. stejn. konverg.,

takže podľa Weierstrass $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}\cos(nx)$ KS

$\Rightarrow \boxed{\text{ABEL}} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n+x^2}}_{a_n} \underbrace{x^{2n}\cos(nx)}_{b_n}$ KS $\Rightarrow \boxed{\text{ABEL}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2n}\cos nx}{n+x^2}}_{b_n} \underbrace{\arctan nx}_{a_n}$ $\boxed{\text{KS}}$. ✓

Celkovo teda konvergujú stejnoměrne na $[-1,1]$.

$\boxed{\text{ABEL}}$ sme vlastne nemuseli používať, mohli sme hneď odhadnúť celú radu Weierstrassom (na X_2) ✓ výborně

$\boxed{3}$ (a) $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^n}\cos(n\pi x)}_{f_n(x)}$ $x \in \mathbb{R}$, platí $f_n'(x) = \frac{n\pi}{2^n}(-\sin(n\pi x))$

a $|f_n'(x)| \le \frac{n\pi}{2^n}$, čo je konvergujúca číselná rada (odmocninové kritérium)

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n\pi}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (n\pi)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1\right)$

$\xrightarrow{\text{Weierstrass}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ $\boxed{\text{KS}}$ na $\mathbb{R}$ a keďže aj $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na $\mathbb{R}$ (rovnaký postup) tak z Vety o výmene derivácie a sumy dostávame

$$F'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cos(n\pi x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(n\pi x)\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n \sin(\pi n x)}{2^n} \rightrightarrows \text{ na } \mathbb{R}$$

(vetu stačilo aplikovať na $[0,2]$, pretože je periodická)

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}}_{f_n(x)}$

mimo nuly počítame $\displaystyle S_N = x^2 \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}_{<1, \text{ sčítame geom radu}} = x^2 \frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N}{\underbrace{1-\frac{1}{1+x^2}}_{\frac{x^2}{1+x^2}}} = \boxed{(1+x^2)\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^N}\right)}$

takže pre $x \neq 0$ máme $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \to 1+x^2}$ $\left(\frac{1}{(1+x^2)^N} \xrightarrow{N\to\infty} 0\right)$

ale pre $x=0$ dostávame triviálne $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cdots = 0}$

Keďže $f_n(x)$ sú spojité $\Rightarrow S_N$ sú spojité, ale bodová lim nie je spojitá v 0 $\Longrightarrow$ nekonverguje stejnomerne na $\mathbb{R}$ (ani na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, pretože v tom prípade by podľa vety o výmene lim a sumy bola spoj v bode 0)

Ale platí (na $\underbrace{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]}_{\delta>0}$)

$$\sigma_N = \sup_{x\in A} \left|(1+x^2)\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^N}\right) - (1+x^2)\right|$$

$$= \sup_{x\in A} \left|\frac{1}{(1+x^2)^{N-1}}\right| = \frac{1}{(1+\delta^2)^{N-1}} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \rightrightarrows \text{ na } \mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]}$$

✓