Termín pro odevzdání: čtvrtek 18. března 2021

Uvažujte funkci

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}\ .$$

1. Ověřte zda (a kde) je daná funkce harmonická a na dané oblasti nalezněte funkci $v(x,y)$ k ní harmonicky sdruženou rozřešením Cauchy-Riemannových podmínek

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

2. Harmoničnost získané funkce v ověřte výpočtem (tím si provedete kontrolu).

3. Určete následně explicitní tvar funkce $f(z)$ definované z u a v pomocí

$$f(z) = u(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) + \mathrm{i}v(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$$

a diskutujte její holomorfnost.

Řešení:

Vidíme, že funkce je $u(x,y) \in C^\infty(\Omega)$, kde $\Omega = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, v počátku není definovaná. Spočtěme nejprve Δu na Ω:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + \frac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 + \frac{6x^2y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

a tedy opravdu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{v } \Omega\,.$$

Hledejme tedy v Ω funkci harmonicky sdruženou k u. K dispozici máme dvojici Cauchy-Riemannových podmínek. Požijme nejprve první z nich, např.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow v = 2xy + 5y + \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy + c(x)\,.$$

Primitivní fci spočtěme např. pomocí substituce $\xi = x^2 + y^2$:

$$\int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy = x\int \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{x}{\xi} + d = -\frac{x}{x^2+y^2} + d\,,$$

neboli dostáváme

$$v = 2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + c(x)\,.$$

kde jsme konstantu d absorbovali do doposud neurčené fce $c(x)$. K jejímu určení použijme nyní druhou z C.R. podmínek:

$$-2y + 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \overset{C.R.}{=} -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - c'(x) \Longrightarrow c'(x) = -1 \Longrightarrow c(x) = -x + c \quad (c\ const)$$

a tedy dostáváme

$$v(x,y) = 2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2+y^2} + c\,.$$

Vidíme, že fce $v(x,y)$ je stejné třídy hladkosti jako $u(x,y)$ (tedy $C^\infty(\Omega)$) a ověřme, že se jedná skutečně o funkci harmonickou. V Ω dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= 2y - 1 - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

a tedy skutečně $\Delta v = 0$ v Ω, přesně, jak čekáme. Určeme nyní komplexní fci $f(z)$ příslušející dvojici fcí u a v. Vyjádřeme (volme $c = 0$)

$$\begin{aligned}
u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) &= x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\left(2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) \\
&= (x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2) + 5(x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}\frac{x - \mathrm{i}y}{x^2+y^2} \\
&= (x+\mathrm{i}y)^2 + 5(x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}\frac{1}{x+\mathrm{i}y}\,,
\end{aligned}$$

a tedy hledaná fce $f(z)$ jest

$$f(z) = z^2 + 5z - \mathrm{i}z - \frac{\mathrm{i}}{z}\,,$$

což je skutečně funkce holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.