Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	8	7	7	7	7	36
Získáno						

[8] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) \mid y(-\frac{1}{2}) = 0,\ y(0) = 0 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(y^2 + (y')^2 - 2y\mathrm{e}^x \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte Gâteaux derivaci funkcionálu Φ.

b) Napište Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremály funkcionálu Φ na množině M.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ a poté rozhodněte, zda jsou nalezené extermály minimizéry či maximizéry daného funkcionálu.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\bigg|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y+th) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left((y+th)^2 + ((y+th)')^2 - 2(y+th)\mathrm{e}^x \right) \mathrm{d}x$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(2(y+th)h + 2(y+th)'h' - 2h\mathrm{e}^x\right) \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$ (a integraci per partes) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\bigg|_{t=0} = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(y - y'' - \mathrm{e}^x\right) h \mathrm{d}x.$$

Odkud lze přečíst Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál $\Phi(y)$

$$y - y'' - \mathrm{e}^x = 0.$$

Eulerovy–Lagrangeovy rovnice vyřešíme metodou variace konstant. (Pokud tedy partikulární řešení nevidíme rovnou nebo pokud nehledáme řešení metodou násady pro speciální pravou stranu.) Řešení homogenní rovnice

$$y'' - y = 0$$

je zřejmě $y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}$. Hledejme nyní partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$y'' - y = -\mathrm{e}^x$$

metoda variace konstant dává pro funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ následledjcí systém rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^x \end{bmatrix},$$

odkud

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} \\ -\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{2x} \end{bmatrix}.$$

Zbývá vyřešit diferenciální rovnice pro $c_1(x)$ a $c_2(x)$, což snadno provedeme pouhou integrací

$$\begin{aligned} c_1 &= -\int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x, \\ c_2 &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

odkud

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2}x, \\ c_2 &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}, \end{aligned}$$

Dosadíme za funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ do vzorce pro partikulární řešení

$$y(x) = c_1(x)\mathrm{e}^{x} + c_2(x)\mathrm{e}^{-x} = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}$$

Celkové řešení nehomogenní rovnice je

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x},$$

konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} y\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

což vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}C_1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}C_2 &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \\ C_1 + C_2 &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\det\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{e} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4\,(\mathrm{e}-1)}\begin{bmatrix} 2-\mathrm{e} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Extremála je tudíž

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4\,(\mathrm{e}-1)}\left((2-\mathrm{e})\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Druhou derivaci funkcionálu φ spočteme podle předpisu

$$\begin{aligned} D^2\Phi(y)[h,h] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D\Phi(y+th)[h]\bigg|_{t=0} \\ &= 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left((y+th)h + (y+th)'h' + h\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{d}x\right)\bigg|_{t=0} = 2\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(h^2 + (h')^2\right)\mathrm{d}x\right), \end{aligned}$$

což je kupodivu totéž co plyne z obecné věty:

Buď Φ funkcionál zadaný předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x.$$

Pak je jeho druhý diferenciál roven

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \int_a^b \left[P\,(h')^2 + Qh^2\right]\mathrm{d}x,$$

kde

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'}, \\ Q &= \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right), \end{aligned}$$

Ke zjištění povahy extremály použijeme některé z následujících kritérií

> Je-li y klasické řešení Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál
>
> $$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$
>
> a je-li pro každé x z intervalu $[a, b]$ funkce $f(y, z) = F(x, y, z)$ konvexní, pak je y minimizér daného funkcionálu.

nebo

> Řekneme, že bod $\tilde{a}$ je konjugovaný k bodu a, pokud má rovnice (za y se dosazuje bod podezřelý z extrému)
>
> $$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ph') + Qh = 0$$
>
> netriviální řešení s okrajovými podmínkami $h(a) = 0$, $h(\tilde{a}) = 0$.
>
> Buď Φ funkcionál zadaný předpisem
>
> $$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$
>
> a nechť y splňuje následující podmínky:
>
> - Funkce y je extremálou funkcionálu Φ, to jest řeší příslušnou Eulerovu–Lagrangeovu rovnici.
> - Koeficient P je (v bodě extremály) kladný (resp. záporný). Přesněji $P(x, y, y') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} > 0$ (resp. $P(x, y, y') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} < 0$).
> - Interval $(a, b]$ neobsahuje žádné body konjugované k bodu a.
>
> Pak je y (slabým) minimem (resp. maximem) funkcionálu Φ.

První z kritérií je splněno, funkce $f(y, z)$ je definována jako

$$f(y, z) = y^2 + z^2 - 2y\mathrm{e}^x,$$

kde x je libovolný bod z intervalu $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Spočteme druhý diferenciál funkce f a vidíme, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$D^2 f[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \mathbf{v} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} \geq 0,$$

a funkce f je tedy konvexní jak je v příslušném kritériu požadováno.

Druhé z kritérií je také zjevně splněno, neboť v našem případě je $P = 1$, $Q = 1$ a příslušná rovnice pro existenci konjugovaného bodu je tedy ($a = -\frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} -h'' + h &= 0, \\ h(a) &= 0, \\ h(\tilde{a}) &= 0, \end{aligned}$$

ale tato rovnice má pouze triviální řešení (řešením rovnice je $h(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$, z okrajových podmínek pak plyne, že obě integrační konstanty jsou nulové), v intervalu $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ proto neexistují konjugované body. Kromě toho jsou zřejmě splněny i ostatní podmínky.

[7] 2. Buď dána posloupnost funkcí
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$
Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0,1]$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

a) $J = [0,1]$,

b) $K = [\alpha, 1]$, kde $\alpha \in (0,1)$.

Řešení:

Volme x libovolně, ale pevně z intervalu $I \setminus \{0\}$, pak zjevně platí, že
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$
Pokud je $x = 0$ pak je posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupností samých nul a limita je opět rovná nule. Bodová limita posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ na intervalu I je tedy nulová funkce $f = 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} f_n = 0.$$
Stejnoměrnou konvergenci vyšetříme s použitím ekvivalentní charakterizace. Platí věta

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
> $$\sigma_n \to 0,$$
> kde
> $$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|\,.$$

Najděme tedy supremum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ na příslušných intervalech. (Funkce f_n a f jsou spojité a oba intervaly jsou uzavřené, je proto možné namísto $\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$ psát rovnou $\max_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$.) Výraz $f_n(x) - f(x)$ je v našem případě zjevně kladný, a proto můžeme bez problémů odstranit absolutní hodnotu.

Hledejme nyní maximum funkce $f_n(x) - f(x)$. První derivace je
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_n(x) - f(x)\right) = \frac{n\left(1+n^2x^2\right) - nx\left(2n^2x\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = \frac{n\left(1-n^2x^2\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2}.$$
Derivace je tedy rovná nule v bodě $x_{\text{ext}} = \frac{1}{n}$.

V případě intervalu $J = [0,1]$ je tento bod vždy uvnitř tohoto intervalu a platí
$$\left(f_n(x) - f(x)\right)\big|_{x=x_{\text{ext}}} = \frac{1}{2}.$$
Dále je zjevné, že funkce $f_n(x) - f(x)$ v stacionárním bodě x_{ext} nabývá maxima. (Funkce $f_n(x) - f(x)$ je kladná, spojitě diferencovatelná a je rovná nule pro $x = 0$ a $x \to +\infty$.) Pro $n \to +\infty$ tedy platí
$$\sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} \not\to 0,$$
a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tedy *nekonverguje stejnoměrně na intervalu J*.

V případě intervalu $K = [\alpha, 1]$ bod $x_{\text{ext}} = \frac{1}{n}$ od nějakého (velkého) n leží mimo interval K. Funkce $f_n(x) - f(x)$ tedy nabývá maxima v jednom z krajních bodů intervalu K. Pro dostatečně velké n je $f_n(x) - f(x)$ na příslušném intervalu klesající, a proto nabývá maxima v levém krajním bodě. Platí tedy
$$\sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\alpha) = \frac{n\alpha}{1+n^2\alpha^2},$$
z čehož plyne, že pro $n \to +\infty$ platí
$$\sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n\alpha}{1+n^2\alpha^2} \to 0,$$
a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tedy *konverguje stejnoměrně na intervalu K*.

[7] 3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Použijete-li při výpočtu nějakou větu, pečlivě odůvodněte, že jsou splněny patřičné předpoklady.

Řešení:

Zjevně platí, že

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x=0.$$

Pokud tedy ukážeme, že je možné zaměnit limitu a integrál, můžeme snadno spočíst původní limitu,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\right)\mathrm{d}x=0.$$

Záměnu limity a integrálu lze odůvodnit například podle Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x\in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x\in M$ platí $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$ pro skoro všechna $x\in M$ platí $|f_n(x)|\leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_M\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Posloupnost f_n je v našem případě tvořena funkcemi

$$f_n(x)=_{\mathrm{def}}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

Tyto funkce jsou na intervalu $M=(0,+\infty)$ spojité a tudíž měřitelné. První předpoklad Lebesgueovy věty je tedy splněn.

Druhý předpoklad je rovněž splněn, limitu jsme spočetli pro libovolné $x\in M$.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu. (Třetí předpoklad Lebesgueovy věty.) Pro libovolné n platí

$$\left|\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\right|\leq\left|\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\right|\leq\left|\frac{x+n}{n}\mathrm{e}^{-x}\right|\leq(x+1)\mathrm{e}^{-x},$$

kde funkce $(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ je lebesgueovsky integrovatelná na M. (Funkce $(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ je spojitá na jakémkoliv uzavřeném intervalu $[0,K]$, je tedy lebesgueovsky integrovatelná na $(0,K)$. Navíc $\int_0^K(x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\leq\int_0^{+\infty}(x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, kde druhý z integrálů je chápán jako Newtonův integrál. Limitní přechod $K\to+\infty$ a Leviho věta pak zaručují lebesgeovskou integrovatelnost na M.) Stačí tedy volit

$$g(x)=_{\mathrm{def}}(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Všechny předpoklady Lebesgueovy věty jsou splněny a lze proto provést záměnu limity a integrálu.

[7] 4. Spočtěte plošný obsah množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ zadané jako průnik množin A a B a C, kde

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}, \\
B &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2Ry \leq 0 \right\}, \\
C &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Řešení:

Množina A je kruh se středem v bodě $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ o poloměru R. Množina B je kruh se středem v bodě $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix}$ o poloměru R. To je zřejmé pokud přepíšeme

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0$$

jako

$$x^2 + (y - R)^2 - R^2 = 0.$$

Pro lepší představu si nakreslíme Obrázek 1.

Cílem je spočítat

$$\int_M \mathrm{d}\lambda.$$

Povšimneme si toho, že množinu M lze rozdělit na kruhovou výseč T_1 a kruhovou úseč U_1, Integrál lze proto přepsat jako

$$\int_M \mathrm{d}\lambda = \int_{T_1} \mathrm{d}\lambda + \int_{U_1} \mathrm{d}\lambda.$$

Pro parametrizaci množin T_1 a U_1 bude vhodné použít polární souřadnice,

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi, \\
y &= r\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Determinant Jacobiho matice je

$$\det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = r.$$

Výpočet plošného obsahu množiny T_1 je jednoduchý,

$$\int_{T_1} \mathrm{d}\lambda = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{2}.$$

Pro výpočet plošného obsahu množiny U_1 je nutné odpovídajícím způsobem upravit integrační meze. Dosazením do vzahu $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ zjistíme, že oblouk kružnice ohraničující množinu U je dán vztahem

$$r^2 = 2Rr\sin\varphi,$$

a proto platí

$$\begin{aligned}
\int_{U_1} \mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}} \int_{r=0}^{2R\sin\varphi} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2R^2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 2R^2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \mathrm{d}\varphi \\
= 2R^2 \left[\frac{2\varphi - \sin(2\varphi)}{4} \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\int_M \mathrm{d}\lambda = \frac{R^2}{2}\frac{\pi}{3} + \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{R^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

[7] 5. Uvažujte funkci danou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0) \\ e^x, & x \in [0, \pi), \end{cases}$$

která je periodicky rozšířená na $\mathbb{R}$.

- Načrtněte graf funkce f.
- Najděte Fourierovu řadu funkce f.
- Diskutujte konvergenci nalezené Fourierovy řady. Určete zda Fourierova řada konverguje k funkci f ve smyslu konvergence v L^2, ve smyslu bodové konvergence a ve smyslu stejnoměrné konvergence.
- Najděte součet Fourierovy řady funkce f v bodě $x = 0$ (pokud existuje).

Řešení:

Spočteme Fourierovy koeficienty a_k, b_k, abychom mohli funkci f rozvinout do Fourierovy řady

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

K výpočtu koeficientů užijeme vzorce

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x.$$

Funkce není ani lichá ani sudá – koeficienty a_k i b_k budou obecně nenulové. Počítejme

$$\pi a_0 = \int_0^{\pi} e^x \mathrm{d}x = [e^x]_0^{\pi} = e^{\pi} - 1.$$

Dále

$$\pi a_k = \int_0^{\pi} e^x \cos kx \mathrm{d}x,$$
$$\pi b_k = \int_0^{\pi} e^x \sin kx \mathrm{d}x.$$

Integrály spočteme metodou *per partes*. Označme si

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos kx \mathrm{d}x,$$
$$J = \int_0^{\pi} e^x \sin kx \mathrm{d}x,$$

pak

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi} e^x \cos kx \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos kx & v = \frac{\sin kx}{k} \end{vmatrix} = \left[e^x \frac{\sin kx}{k} \right] - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} e^x \sin kx \mathrm{d}x \\ = -\frac{1}{k} J = \begin{vmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin kx & v = -\frac{\cos kx}{k} \end{vmatrix} = -\frac{1}{k} \left(\left[-\frac{\cos kx}{k} e^x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} e^x \cos kx \mathrm{d}x \right) \\ = \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{k^2} - \frac{1}{k^2} I. \end{aligned}$$

Z výpočtu plyne, že

$$I = \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{k^2} - \frac{1}{k^2} I$$

odkud $I = \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{k^2+1}$ a následně $J = -k \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{k^2+1}$. Celkem tedy

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{\pi} - 1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\pi}(-1)^k - 1}{k^2 + 1} (\cos kx - k \sin kx) \right).$$

Funkce f je po částech spojitě diferencovatelná, a splňuje proto předpoklady Dirichletova–Jordanova kritéria pro konvergenci Fourierových řad, které říká:

Buď $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a nechť platí, že funkce $f \in BV([a, b])$, potom platí

$$\forall x \in [a, b] : \lim_{n \to +\infty} s_n(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\xi \to x+} f(\xi) + \lim_{\xi \to x-} f(\xi) \right)$$

Je-li navíc $I \subset (a, b)$ uzavřený interval a $f \in \mathcal{C}([a, b])$, pak

$$s_n \overset{I}{\rightrightarrows} f.$$

Funkce je zřejmě v $L^2((-\pi, \pi))$ a splňuje tedy předpoklady Carlesonovy věty o skoro všude konvergenci, která říká:

Buď $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a buď $f \in L^p((a, a + 2\pi))$, $p \in (1, +\infty)$, pak platí

$$s_n \overset{L^p}{\to} f,$$
$$s_n(x) \to f(x) \text{ skoro všude.}$$

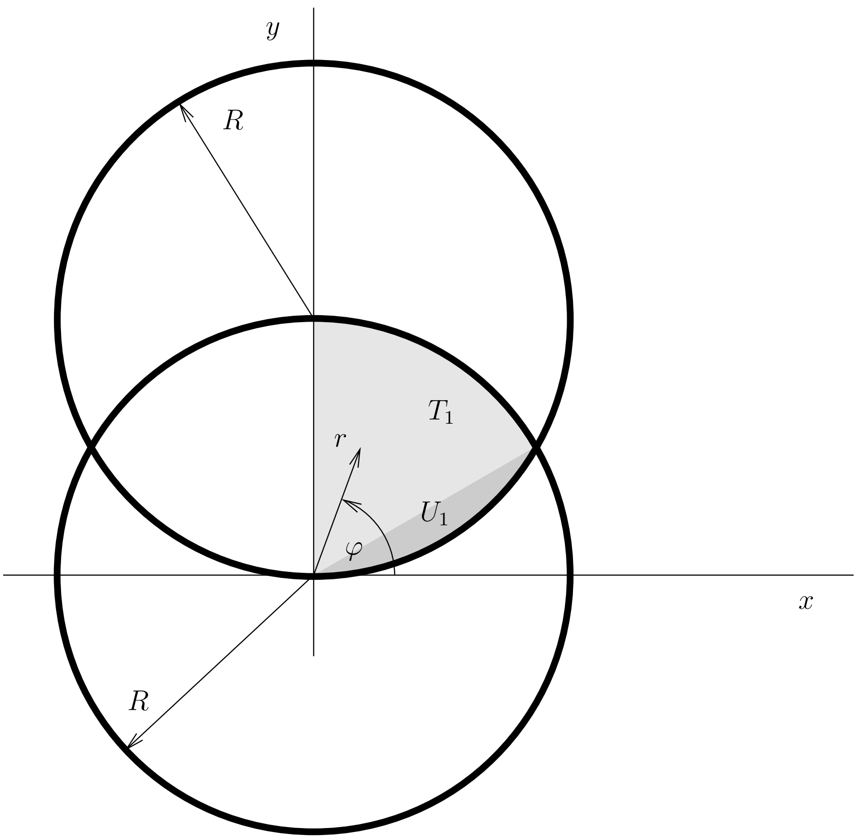
Což už ale stejně víme z Dirichtetova–Jordanova kritéria.

V bodě $x = 0$ (bod nespojitosti) pak platí pouze

$$\lim_{n \to +\infty} s_n(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to 0+} f(x) + \lim_{x \to 0-} f(x) \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2},$$

čímž jsme dostali rovnost

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{e^\pi - 1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^\pi (-1)^k - 1}{k^2 + 1} \right) = \frac{1}{2}.$$



Obrázek 1: Množina M.