15.5. Reziduová věta

Motivační úvaha pro definici residua: Je-li a izolovaná singularita fce f, pak $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ v $U_{0,R}(a)$. Pro $r \in (0,R)$ pak platí:

$$\int_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz = \int_{\partial B_r(a)} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n\, dz$$

$f \in H(U_{0,\rho}(a))$ a tedy stejnoměrně konvergentní v okolí $\partial B_r(a)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_r(a)} (z-a)^n\, dz \quad \overset{\substack{z = a + re^{it} \\ dz = ire^{it}}}{=}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} i r^{n+1} e^{(n+1)it}\, dt$$

$$= \underline{\underline{c_{-1}\, 2\pi i}}$$

Definice c_{-1} se nazývá residuum fce f v bodě a a značí se $\boxed{\operatorname{res}_a f}$

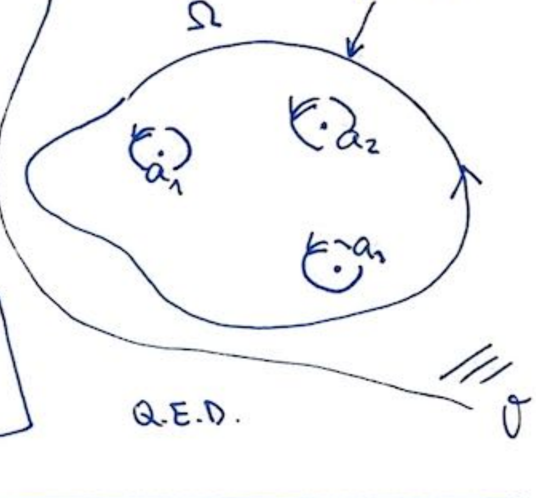
Věta 15.14 (Reziduová věta) Buď $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ a Ω je otevřené, omezená taková, že $\partial\Omega$ je popsána jako konečný součet regulárních vhodně orientovaných křivek (tak, aby platila pro Ω a $\partial\Omega$ Greenova věta). Nechť $A \subset \Omega$ konečná a $f \in H(\mathcal{O} \setminus A)$. Potom

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in A} \operatorname{res}_a f$$

(Dk) je přímým důsledkem Cauchy-Goursatovy věty 15.5.

Vysvětlení: Určitě existuje $\varepsilon>0$ tak, že pro každé $a\in A$ $U_\varepsilon(a)$ neobsahuje žádný další bod z A. Funkce $f\in H\left(\mathcal{O}\setminus \bigcup_{a\in A} U_\varepsilon(a)\right)$ a

$$\text{tak} \int_{\partial\Omega - \sum_{a\in A}\partial U_\varepsilon(a)} f(z)\,dz \overset{V15.5}{=} 0$$



Pak však

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{a\in A}\int_{\partial U_\varepsilon(a)} f(z)\,dz} \overset{\text{Motivační úvaha}}{=} \sum_{a\in A} 2\pi i \operatorname{res}_a f = \boxed{2\pi i\sum_{a\in A}\operatorname{res}_a f.}$$

Q.E.D.

Příklad 1 Uvažte $f(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)^2}$. Spočtěte $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz$ kde

a) Ω obsahuje $z=1$

b) Ω obsahuje $z=1, z=-1$

Řešení: Pozorujme, že f má v 0 kořen násobnosti 2, v 1 pól násobnosti 1 a v -1 pól násobnosti 2.

Ad a) $f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{z^2}{(z+1)^2}$ holomorfní fce v okolí -1. Hodnota $\frac{z^2}{(z+1)^2}\Big|_{z=1} = \operatorname{res}_1 f$

Tedy $\int_{\partial\Omega} f(z) = 2\pi i\cdot\frac{1}{4} = i\frac{\pi}{2}$

Ad b) $f(z)=\frac{1}{(z+1)^2}\frac{z^2}{z-1} \underset{\text{Taylor } \frac{z^2}{z-1}}{=} \frac{1}{(z+1)^2}\left(\frac{z^2}{(z-1)}\Big|_{z=-1} + \left(\frac{z^2}{z-1}\right)'\Big|_{z=-1}(z+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-1)^n\right)$

$$\left(\frac{z^2}{z-1}\right)' = \frac{2z(z-1)-z^2}{(z-1)^2}\Big|_{z=-1} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = 2\pi i$$

▨

Pozorování a předchozí výpočet se dá zobecnit. Platí:

Tvrzení (jak určovat hodnoty residuí)

(1) Je-li $f \in H(\mathcal{U}(a))$, pak $\operatorname{res}_a f = 0$

(2) Jsou-li $f, g \in H(\mathcal{U}(a))$ a g má v a kořen násobnosti 1,

$$\text{pak } \operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

(3) Je-li $f \in H(\mathcal{U}(a))$ a g má v a pól násobnosti 1 (tzn. v a je izolovaná sing.)

$$\text{pak } \operatorname{res}_a fg = f(a) \operatorname{res}_a g$$

(4) Má-li f v a pól násobnosti nejvýše m,

$$\text{pak } \operatorname{res}_a f = \lim_{z \to a} \left[f(z)(z-a)^m \right]^{(m-1)} \frac{1}{(m-1)!}$$

Vrátíme-li se k předchozímu příkladu, variantě a), pak $f(z) = h(z)g(z)$, kde $h(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$ a $g(z) = \frac{1}{z-1}$ a dle (3) $\operatorname{res}_1 f = \operatorname{res}_1 hg = h(1) \operatorname{res}_1 g$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}},$$

zatímco ve variantě b)

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z \to -1} \left[\frac{1}{(z+1)^2} \frac{z^2}{z-1} (z+1)^2 \right]' = \lim_{z \to -1} \left[\left(\frac{z^2}{z-1} \right)' \right] = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

Dk Tvrzení

Ad (1) $f \in H(\mathcal{U}(a)) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ v $\mathcal{U}(a) \Rightarrow c_{-1} = 0$.

Ad (2) Protože g má kořen v a násobnosti 1, tak $g(z) = (z-a)\tilde{g}(z)$ a $\tilde{g}(a) \neq 0$ a $\tilde{g} \in H(\mathcal{U}(a))$

$\Downarrow$

odtud

$$g'(z) = \tilde{g}(z) + \tilde{g}'(z)(z-a)$$

a $g'(a) = \tilde{g}(a)$

tedy

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)} \underbrace{\left(\frac{f(z)}{\tilde{g}(z)} \right)}_{\in H(\tilde{\mathcal{U}}(a))}$$

$\Downarrow$

$$\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{\tilde{g}(a)} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

Ad (3) $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m$ a $g(z) = \frac{\operatorname{res}_a g}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$. Odtud

$$\operatorname{res}_a f(z)g(z) = a_0 \operatorname{res}_a g = f(a) \operatorname{res}_a g.$$

Ad (4)

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Pak

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots + c_{-2}(z-a)^{m-2} + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \dots$$

a tedy

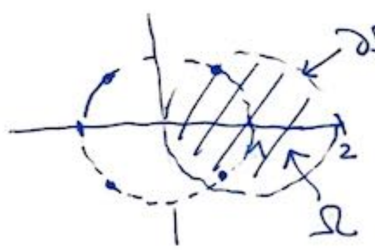
$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \left[f(z)(z-a)^m \right]^{(m-1)} \Big|_{z=a}$$

Příklady ② Spočtěte $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{dz}{z^4+1}$ kde $\Omega := \{z\in\mathbb{C},\ z=(x+iy):\ \underbrace{x^2+y^2\le 2x}_{\Updownarrow}\}$

$$(x-1)^2+y^2\le 1$$

Rce $z^4+1=0$ má 4 kořeny násobnosti 1: $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}(2k+1)} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=0,1,2,3$



$$\int_{\partial\Omega}\frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{z_0} f + \operatorname{res}_{z_3} f\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_0} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_3}\right)$$

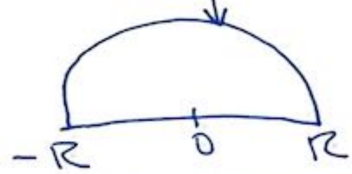
Tvrzení ②

$$= \pi i\,\frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2} = i\pi\cosh\left(i\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= i\pi\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

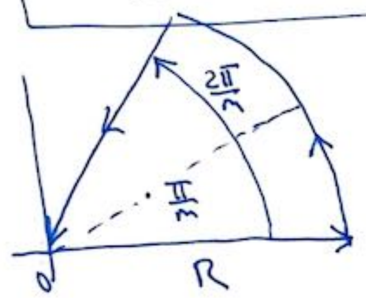
③ Integrály funkcí klesající v ∞ rychleji než $\frac{1}{r}$

(a) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ $\quad a,b>0$ $\quad I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$



(b) $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{z^n+1}$ $\quad m<n$

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{x^n+1}\,dx$$



④ Integrály typu $f(z)e^{i\gamma z}$, $\gamma>0$

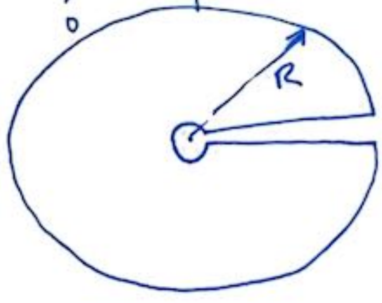
$f(z)\sim\frac{1}{z^s}$ pro $|z|\gg 1$ $\quad s\in(0,1\rangle$

⑤ Integrály $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos t,\sin t)\,dt = \int_{|z|=1} F(z)\,dz$

⑥ Integrály $I(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} z^{a-1} f(z)\,dz$

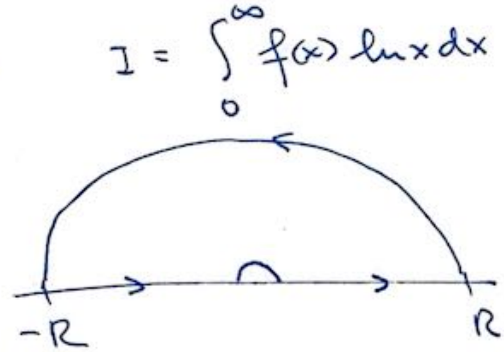
Mellinova transformace

$a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$



(7) $I = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}\,dx$

(8) Integrály typu $I = \int_0^\infty f(x)\ln x\,dx$ kde · f je sudá
· nemá pól v 0
· $\max|f(Re^{it})|R\ln R \to 0$



K výpočtům, které budou procvičovány na cvičeních, budete využívat často "Lemma o obcházení pólu" a "Jordanovo lemma" (o vymizejícím vlivu integrálu přes vnější kružnici)

Než si je zavedeme, zmíníme jednu definici.

Definice označení: Řekneme, že $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je meromorfní v $\Omega\subset\mathbb{C}$ $\overset{def.}{\equiv}$ $\exists A\subset\Omega$ izolované, tak, že
• f je holomorfní v $\Omega\setminus A$
• f má v bodech z A pól nebo odstranitelnou singularitu.

$\boxed{\text{Lemma A}}$ JORDANOVO

• Buď $\gamma:\langle a,b\rangle\to\mathbb{C}$ parametrizována zobrazením $\boxed{\varphi:\langle a,b\rangle\to\mathbb{C},\ \varphi(t)=Re^{it},\ t\in\langle a,b\rangle}$ $0\le a<b\le 2\pi$
• Nechť f je spojitá v $\mathbb{C}\setminus B_K(0)$ pro K dostatečně velké.

Označme $M_R := \max_{z\in\gamma}|f(z)|$.

Pak platí:

(a) Je-li $RM_R \xrightarrow{R\to\infty} 0$, pak $\int_\gamma f(z)\,dz\to 0$ pro $R\to\infty$

(b) Je-li $M_R\xrightarrow{R\to\infty}0$, $\langle\alpha,\beta\rangle\subset\langle 0,\pi\rangle$, pak $\int_\gamma e^{i\gamma z}f(z)\,dz\to 0$ pro $R\to\infty$.

Dk. $\boxed{\text{Ad (a)}}$ $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(Re^{it})Rie^{it}\,dt$

Tedy $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \max_{z\in\gamma}|f(z)|\underbrace{2\pi R(b-a)}_{l(\gamma)} = 2\pi(b-a)\,RM_R \xrightarrow{R\to\infty} 0$ dle předpokladu.

$\boxed{\text{Ad (b)}}$ $\int_\gamma e^{i\gamma z}f(z)\,dz = \int_a^b \underbrace{e^{i\gamma Re^{it}}}_{e^{i\gamma R\cos t}\,e^{-\gamma R\sin t}} f(Re^{it})Rie^{it}\,dt$

Tedy $\left|\int_\gamma e^{i\gamma z}f(z)\,dz\right| \le RM_R\int_a^b e^{-\gamma R\sin t}\,dt \le 2RM_R\int_0^{\pi/2}e^{-\gamma R\sin t}\,dt \le 2RM_R\int_0^{\pi/2}e^{-\gamma\frac{2R}{\pi}t}\,dt = \frac{\pi M_R}{\gamma}\left[-e^{-\gamma\frac{2R}{\pi}t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$ ∎

$\langle a,b\rangle\subset\langle 0,\pi\rangle$ kde $\sin t>0$

VIZ VÝPOČET Fresnelových integrálů

$\boxed{\text{Lemma B}}$ <u>O obcházení jednonásobného pólu</u>

· Má-li f v a pól násobnosti 1, a je-li γ část kružnice parametrizována $\varphi(t) = a + \varepsilon e^{it}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Pak

$$\int_\gamma f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} i(\beta - \alpha)\,\mathrm{res}_a f$$

(Dk) Funkci f lze psát v $U_{0,\rho}(a)$ ve tvaru: $f(z) = \dfrac{\mathrm{res}_a f}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$

Pak

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{res}_a f \int_\gamma \frac{dz}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_\gamma (z-a)^n$$

$$= \underbrace{\mathrm{res}_a f \; \varepsilon i \int_\alpha^\beta \frac{e^{it}}{\varepsilon e^{it}}\,dt}_{} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_\alpha^\beta i \varepsilon^{n+1} e^{i(n+1)t}\,dt$$

$$= i(\beta-\alpha)\,\mathrm{res}_a f + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\varepsilon^{n+1}}_{\downarrow\, 0} i \int_\alpha^\beta \left(\cos((n+1)t) + i\sin((n+1)t)\right) dt$$

pro $\varepsilon \to 0$, ostatní omezené

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \underline{\underline{i(\beta-\alpha)\,\mathrm{res}_a f.}}$$

☒

Tuto sekci zakončíme zavedením singularit a residua v ∞.
Připomeň $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

SINGULARITY A RESIDUUM V ∞

Definice Funkce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v ∞ <u>izolovanou singularitu</u> $\equiv$ $\exists R > 0$ tak, že $f \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)})$. Je-li ∞ izolovaná singularita, pak řekneme, že

$$\infty \text{ je } \begin{cases} \text{odstranitelná sing.} \\ \text{pól} \\ \text{podstatná singularita} \end{cases} \overset{\text{df.}}{\equiv} f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ má v } 0 \begin{cases} \text{odstranitelnou singularitu} \\ \text{pól} \\ \text{podstatnou singularitu} \end{cases}$$

Je-li $f \in H(\mathbb{C} - \overline{B_R(0)})$, pak
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$
na $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > R\}$

$\Updownarrow$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$
na $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < \frac{1}{R}\}$

- má v 0 odstranitelnou singularitu $\equiv c_n = 0 \ \forall n > 0$
- má v 0 pól $\equiv \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ c_n = 0$ a $c_{n_0} \neq 0$
- má v 0 podstatnou singularitu $\equiv \forall n > 0 \ \exists m > n \ c_m \neq 0$

Definice Nechť f má v ∞ izolovanou singularitu, pak

$$\operatorname{res}_\infty f \overset{df.}{=} -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} f(z)\,dz$$

Znaménko $-$ je zde proto, že $\partial B_R(0)$ je orientována kladně (tj. proti směru hodinových ručiček) ale množina, která nás zajímá leží napravo od křivky.

Věta 15.15 Je-li $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ Laurentova řada funkce f v ∞.

Pak

$$\boxed{\operatorname{res}_\infty f = -c_{-1}}$$

Dk

$$\operatorname{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_R(0)} z^n\,dz$$

$$= -c_{-1}.$$

víme, že jen pro $n=-1$ je $\int_{\partial B_R(0)}$ nenulový

$\blacksquare$

Úvaha jak $\operatorname{res}_\infty f$ počítat

Nechť γ je křivka a $\Phi: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ zobrazuje γ na $\Phi\circ\gamma$ a předpokládejme, že Φ je na okolí γ holomorfní.

γ je dána parametrizací $\varphi: \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$

Pak

$$\int_{\Phi\circ\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(\Phi(\varphi(t)))(\Phi\circ\varphi)'(t)\,dt = \int_a^b f(\Phi(\varphi(t)))\,\Phi'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_\gamma (f\circ\Phi)(z)\,\Phi'(z)\,dz.$$

Tento výsledek nyní využijeme pro $\operatorname{res}_\infty f$.

Máme:

$$\operatorname{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} f(z)\,dz \underset{\Phi:\, z\mapsto \frac{1}{z}}{=} +\frac{1}{2\pi i}\int_{-\partial B_{\frac{1}{R}}(0)} f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\,dz$$

$1\to 1$
$i\to -i$
$-1\to -1$
mění orientaci

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{\frac{1}{R}}(0)} f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\,dz = -\operatorname{res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}.$$

Odvodili jsme užitečný vztah:

$$\boxed{\operatorname{res}_\infty f = -\operatorname{res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} \quad (\clubsuit)$$

$\blacksquare$

Sere: Nakonečne jednodušší, ale důležitý tvrzení o součtu residuí v $\mathbb{C}^*$.

Věta 15.16 Buď $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ kde A je konečná množina izolovaných singularit. Potom

$$\boxed{\sum_{a \in A \cup \{\infty\}} \operatorname{res}_a f = 0}$$

Dk Dle definice A, existuje $R > 0$ tak, že $A \subset B_R(0)$. Odsud plyne, že ∞ je izolovaná singularita.

Dle Věty o residuích (Věta 15.14):

$$2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{res}_a f \overset{\text{V. 15.14}}{=} \int_{\partial B_R(0)} f(z)\,dz \underset{\text{definice } \operatorname{res}_\infty f}{=} -2\pi i \operatorname{res}_\infty f,$$

což dává ( ). ■

Příklady (a) Spočtěte $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7}\,dz$. Víme, že všechny izolované sing. f leží na $|z|=1$. Tedy dle V15.16:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7}\,dz = -2\pi i \operatorname{res}_\infty f = 2\pi i \operatorname{res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} = 2\pi i \operatorname{res}_0 \frac{1}{1+z^7}\frac{1}{z} = \underline{\underline{2\pi i}}$$

(b) $$\boxed{\int_{|z|=3} \frac{1}{z^9+1}\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 \frac{z^7}{1+z^9} = 0}$$