Věta 15.4 (o lokální existenci inverzní fce k holomorfní funkci a o její derivaci) Nechť $f \in H(B_\rho(z))$ a $f'(\tilde{z}) \neq 0$ $\forall \tilde{z} \in B_\rho(z)$.
Pak existuje okolí A, na kterém je f prostá, a příslušná inverzní funkce g je holomorfní a platí

$$g \circ f = \text{identita} \quad \text{a} \quad g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \iff g'(f(\tilde{z})) = \frac{1}{f'(\tilde{z})}$$

neboli

$$\left[f^{-1}\right]'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \iff \left(f^{-1}\right)'(f(\tilde{z})) = \frac{1}{f'(\tilde{z})}$$

Lze dokázat stejně jako větu o inverzním zobrazení pro funkce $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Provedeme však malinko jiný důkaz na str. 15/10.

Shrnutí o (holomorfních fcích na $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřené) $=: H(\Omega)$

$\boxed{f \in H(\Omega)} \iff$ • f má diferenciál $Df(z)(k)$ $\forall z \in \Omega$ $\quad (f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

a splňuje jednu z následujících podmínek (které jsou vzájemně ekvivalentní):

• (i) $(f = u + iv)$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ $\quad$ Cauchy-Riemannovy rovnice

$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ $\quad \forall z = x+iy \in \Omega$

• (ii) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial \bar z} := \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]$

• (iii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) \quad \forall z \in \Omega$

• (iv) f splňuje podmínky konformality

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(z)\right| = \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(z)\right|$

$\overline{\dfrac{\partial f}{\partial x}(z)} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = 0$

$\det Df(z) \geq 0 \quad \forall z \in \Omega$

Platí:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

- Je-li $f \in H(\Omega)$, pak si ukážeme, že f má derivace všech řádů a z (CR) rovnic plyne $\Delta u = \Delta v = 0$ v Ω.
- Je-li $f \in H(\Omega)$, $f'(z) = 0$ v Ω $\Rightarrow$ $f \equiv$ konst. v Ω
- Je-li $f \in H(\Omega)$, $\mathrm{Re}\, f \equiv$ konst. v Ω $\Rightarrow$ $f \equiv$ konst. v Ω
- —"— $|f|_{\mathbb{C}} \equiv$ konst. v Ω $\Rightarrow$ $f \equiv$ konst. v Ω.

Důkaz Věty 15.4 je založen na třech důležitých příspěvcích:

1. Věta 8.30 o lokální inverzní funkci pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ s $d=2$.
2. Věta 15.1. týkající se (CR) podmínek/rovnic
3. Cauchy - Goursatově větě, která implikuje, že "je-li $f \in H(\Omega)$, Ω otevřená $\subset \mathbb{C}$, pak f má spojité derivace libovolně všech řádů." Tuto větu dokážeme později.

$\boxed{\text{Důkaz Věty 15.4}}$ Protože $f \in H(B_\rho(z))$, tak dle Věty 15.1. fce f, jakožto fce z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, splňuje (C-R) podmínky. Tedy $Df(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, kde $a + ib = \frac{\partial f}{\partial x}$. Tak $\det Df(\tilde{z}) = a^2+b^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(z)\right|^2 = |f'(z)|^2 \neq 0$. Protože $f \in H(B_\rho(z))$, má dle ③ spojité parciální derivace. Funkce f je tedy regulární (definovaná na otevřené mn., C^1-fce, $\det Df(z) \neq 0$).
Dle Věty 8.30 existuje $U_\delta(z)$ tak, že $f: U_\delta(z) \xrightarrow{\text{na}} f(U_\delta(z))$ prostá a $f(U_\delta(z))$ je otevřená. Pak také existuje

$$g := f^{-1}: f(U_\delta(z)) \xrightarrow{\text{na}} U_\delta(z) \text{ prostá a } C^1$$

tak, že

$$g(f(\tilde{z})) = \tilde{z} \quad \forall \tilde{z} \in U_\delta(z)$$

$$Dg(w) = Df^{-1}(w) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{a tedy } f^{-1} \text{ splňuje (CR) podmínky}$$

a tak $f^{-1} \in H\left(f(U_\delta(z))\right)$. Protože

$$f^{-1}(f(\tilde{z})) = \tilde{z} \qquad \text{a} \qquad f(f^{-1}(w)) = w$$

dostáváme, derivováním složené funkce

$$[f^{-1}]'(f(\tilde{z}))\, f'(\tilde{z}) = 1 \quad \Rightarrow \quad [f^{-1}]'(f(\tilde{z})) = \frac{1}{f'(\tilde{z})} \quad \forall \tilde{z} \in U_\delta(z)$$

$$[f'](f^{-1}(w))[f^{-1}]'(w) = 1 \Rightarrow \quad [f^{-1}]'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in f(U_\delta(z))$$

$\boxed{///}$

Základní komplexní funkce (exp, sin, cos, sinh, cosh, Log, obecná mocnina)

Připomeňme si kapitolku 6.4 (mocninné řady) a zavedení exp, sin, cos. Víme (viz Věta 6.21 (strany 6/36 – 6/39) a její důkaz)

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$\exp z, \sin z, \cos z : \underset{z}{\mathbb{C}} \rightarrow \underset{do}{\mathbb{C}}$

$$(\exp z)' = \exp z$$
$$(\sin z)' = \cos z$$
$$(\cos z)' = -\sin z$$

$\exp 0 = 1 \qquad e := \exp 1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Také platí Eulerova identita $\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z}$ $z \in \mathbb{C}$

a odtud $\boxed{\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$ $\boxed{\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$

Lze také definovat

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a platí 2. Eulerova identita $\boxed{e^{iz} = \cosh(iz) + \sinh(iz)}$

a $\boxed{\cosh(iz) = \cos z}$ a $\boxed{\sinh(iz) = i \sin z}$

Platí součtové vzorce

$$\left.\begin{aligned}
\exp(z_1+z_2) &= \exp z_1 \exp z_2 \\
\cosh(z_1+z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \\
\sinh(z_1+z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \\
\cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
\sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2
\end{aligned}\right\} z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Odsud $e^z \cdot e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1 \Rightarrow e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$ $\left(\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp z}\right)$

$$!\left(e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}\right)!$$

Také:

- $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \left.\dfrac{p+\frac{1}{p}}{2}\right|_{p=e^{iz}} = \left.\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)\right|_{p=e^{iz}}$

  hledáme-li řešení v $\mathbb{C}$ rovnice $\cos z = a$ pak řešíme kvadratickou rovnici $\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right) = a$ $\quad p = e^{iz}$

- $\operatorname{tg} z := \dfrac{\sin z}{\cos z} = -i \left.\dfrac{q-1}{q+1}\right|_{q=e^{2iz}}$

- Také $\underbrace{e^{x+iy}}_{\exp z} = e^x e^{iy} = \underline{e^x(\cos y + i \sin y)}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Tohoto porovnání využijeme k bližšímu prozkoumání fce } \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.}$

- $\underline{\exp(z+2\pi i)} = \exp z \exp(2\pi i) = \exp z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \underline{\exp z}$

  exp je $2\pi i$ periodická

- horizontální přímky se zobrazují na polopřímky vycházející z počátku (ale počátek tam nepatří)
- vertikální přímky se zobrazují na kružnice kolem počátku

$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

> Ačkoliv $\exp z = (e^x\cos y, e^x\sin y)$ splňuje CR podmínky a $\det Df(x,y) \neq 0$, $\exp: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ není globálně invertovatelná.

$$\exp\big|_{(-\pi,\pi)} \xrightarrow{\text{prostě}} \mathbb{C}\setminus(-\infty,0\rangle$$

$\uparrow$ pás

$$\exp\big|_{(-\pi,\pi\rangle} \xrightarrow[\text{na}]{\text{prostě}} \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Definuji: **Hlavní hodnota $\underbrace{}_{}$komplexního logaritmu**

$$\boxed{\operatorname{Log} := \left(\exp\big|_{(-\pi,\pi\rangle}\right)^{-1}}$$

Q: CO TO JE?

Řeším pak $\boxed{e^z = w \in \mathbb{C}}$ Popis všech řešení charakterizuje komplexní logaritmus

Q: CO JE z?

$e^z = w$

- $w = 0 \Rightarrow$ žádné řešení
- $w \neq 0 \Rightarrow w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ $\Rightarrow |w| = e^x$ a $\alpha = y - 2k\pi$

$\Updownarrow$

$\boxed{x = \ln|w|}$

$\boxed{y = \alpha + 2k\pi}$

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\alpha, \quad \alpha \in (-\pi,\pi\rangle, \quad z = |z|e^{i\alpha}}$$

- v $z = 0$ $\operatorname{Log} z$ není definován
- pro $\{z : x < 0\}$ (záporná reálná osa) $\operatorname{Log} z$ není spojitá (nespojitost lze posunout)

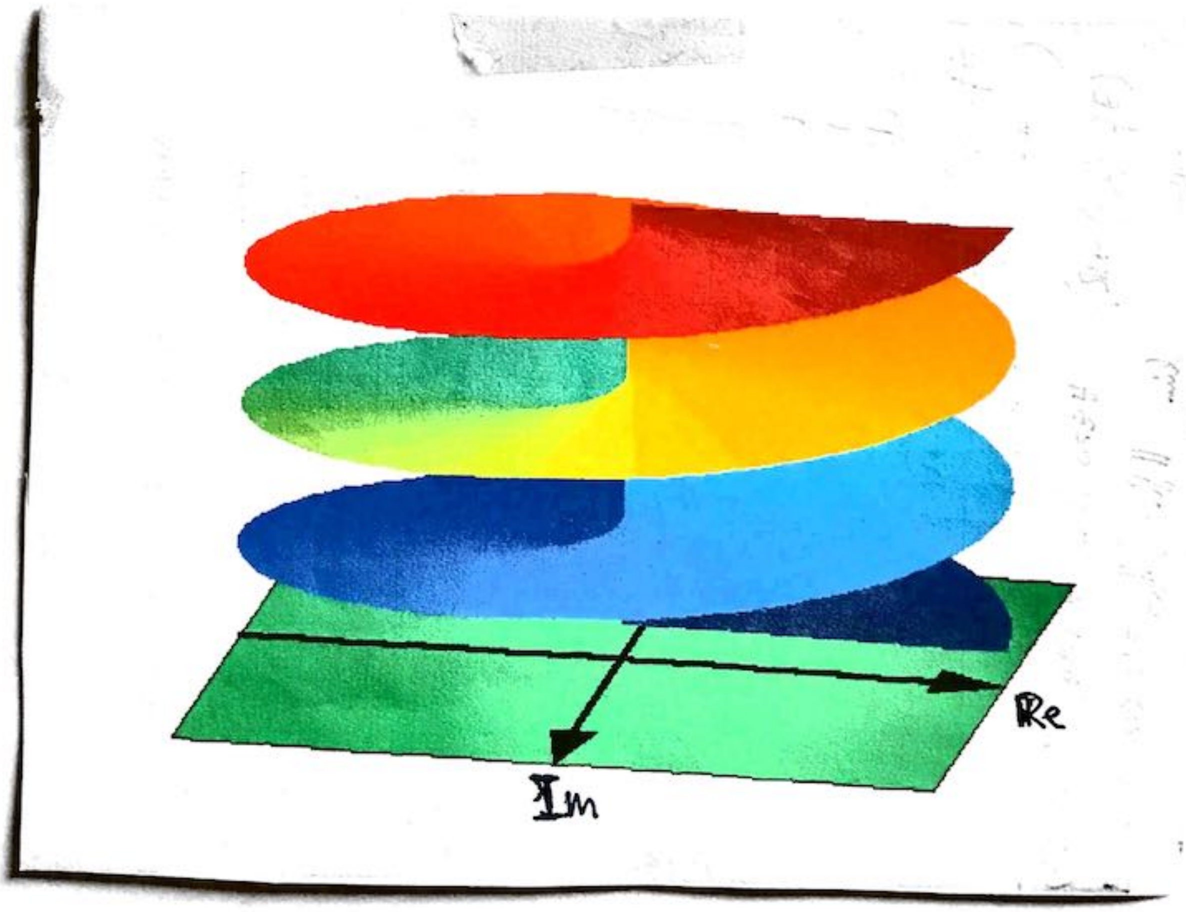
Protože $\operatorname{Log} z = \left(\exp|_{(-\pi,\pi\rangle}\right)^{-1}$, dle Věty 15.4 máme

$$\underline{\underline{(\operatorname{Log} w)'}} = \frac{1}{\exp' z|_{z=\operatorname{Log} w}} = \frac{1}{\exp z|_{z=\operatorname{Log} w}} = \underline{\underline{\frac{1}{w}}}$$

▶ $\operatorname{Log} w$ je holomorfní na $M := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Platí Tvrzení: buď
- $f \in H(\Omega)$ a $g \in H(\sigma)$, kde $\Omega, \sigma \subset \mathbb{C}$ otevřené,
- nechť $f = g$ na $\sigma \cap \Omega$

Pak $$h(z) := \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ g(z) & z \in \sigma \end{cases}$$ je holomorfní na $\Omega \cup \sigma$.



15.3. Komplexní křivkový integrál a integrace $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

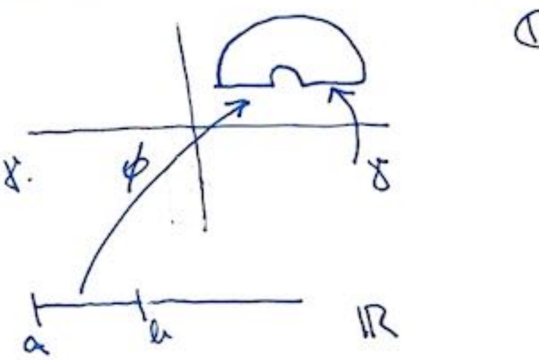
▶ Komplexní křivkový integrál

- Připomeňme, že pro $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ je $\int_a^b f\,dx := \int_a^b \mathrm{Re} f\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im} f\,dx$
- Také si připomeňme, že jsme psávali $\vec{f}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ $\vec{f}(x)=(f_1(x),\dots,f_d(x))$.

Ačkoliv můžeme $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ztotožnit s $\vec{\tilde{f}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tak je třeba mít na mysli, že z i $f(z)\in\mathbb{C}$ jsou prvky tělesa $\mathbb{C}$ a lze s nimi pracovat jinak, než jak jsme zvyklí pro vektorové funkce. Také pro $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ nepíšeme/nezdůrazňujeme (např. tučně), že by mělo jít o vektor.

- Nechť $\phi:\langle a,b\rangle\to\mathbb{C}$ je parametrizace orientované regulární křivky γ.

Nechť $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ spojitá definovaná na množině obsahující γ.



$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b \underbrace{f(\phi(t))}_{\in\mathbb{C}}\,\underbrace{\phi'(t)}_{\in\mathbb{C}}\,dt}$$

VAROVÁNÍ: Ačkoliv vzoreček připomíná křivkový integrál druhého druhu, jedná se o jiný a tajemnější objekt, neboť zahrnuje tajemné komplexní násobení. Fyzikální interpretace je komplikovanější.

<u>Věta 15.4</u> (o souvislosti $\int_\gamma f(z)\,dz$ s křivkovým integrálem 2. druhu).

Buď $f(z)=f_1(z)+if_2(z)$. Pak

$$I := \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (f_1,-f_2)\cdot\vec{ds} + i\int_\gamma (f_2,f_1)\cdot\vec{ds}$$

křivkové integrály 2. druhu

(Dk) Přímým výpočtem:

$$I = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_a^b \Big(f_1(\phi(t)) + i f_2(\phi(t))\Big)\Big(\phi_1'(t) + i\phi_2'(t)\Big)\,dt$$

$$= \int_a^b \Big(f_1(\phi(t))\phi_1'(t) - f_2(\phi(t))\phi_2'(t)\Big)\,dt + i\int_a^b \Big(f_1(\phi(t))\phi_2'(t) + f_2(\phi(t))\phi_1'(t)\Big)\,dt$$

$$= \int_a^b \Big(f_1(\phi(t)), -f_2(\phi(t))\Big)\cdot\Big(\phi_1'(t), \phi_2'(t)\Big)\,dt + i\int_a^b \Big(f_2(\phi(t)), f_1(\phi(t))\Big)\cdot\Big(\phi_1'(t), \phi_2'(t)\Big)\,dt$$

$$= \int_\gamma (f_1, -f_2)\cdot\vec{ds} + i\int_\gamma (f_2, f_1)\cdot\vec{ds}$$

▨

Odsud, a z nezávislosti křivkového integrálu 2. druhu na volbě souhlasně orientované regulární parametrizace plyne, že také komplexní křivkový integrál nezávisí na volbě souhlasně orientované regulární parametrizace.

Tvrzení (odhad komplexního křivkového integrálu)

- Buď γ po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ délky l. $\left(l := \int_\gamma ds\right)$
- Buď $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ splňující $|f(z)| \le M \;\forall z\in\gamma\subset\mathbb{C}$ $(M>0)$ (tj. f je omezená na křivce γ)

Pak $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le 4Ml$

(Dk) $\left|\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b f_1\phi_1' - f_2\phi_2' + i(f_2\phi_1' + f_1\phi_2')\right| \le$

$$\le \left|\int_a^b f_1\phi_1'\right| + \left|\int_a^b f_2\phi_2'\right| + \left|\int_a^b f_2\phi_1'\right| + \left|\int_a^b f_1\phi_2'\right|$$

$$\le \int_a^b \Big(|f_1||\phi_1'| + |f_2||\phi_2'| + |f_2||\phi_1'| + |f_1||\phi_2'|\Big)\,dt$$

$$\le 4\int_a^b M\sqrt{(\phi_1')^2 + (\phi_2')^2}\,dt \le 4M\int_a^b ds = 4Ml$$

▨

V důkazu jsme využili odhad: $\left[\text{je-li } g:(a,b)\to\mathbb{C}, \text{ pak } \left|\int_a^b g\,dt\right| \le \int_a^b |g|\,dt\right]$ (●)

(Dk) (●) Označ $c := \int_a^b g(t)\,dt$, $c\in\mathbb{C}$.

Pak $0 \le |c|^2 = \bar{c}c = \bar{c}\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \bar{c}\,g(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\big(\bar{c}\,g(t)\big)\,dt$

$$\le \int_a^b |\bar{c}\,g(t)|\,dt$$

$$\le |c|\int_a^b |g(t)|\,dt$$

neboť vlevo je reálné číslo

$\boxed{\text{Věta 15.5}}$ (Cauchy-Goursatova věta)

Buď $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset U \subset \mathbb{C}$ otevřená a omezená s hranicí $\partial\Omega$, kterou lze popsat jako součet konečného počtu regulárních uzavřených orientovaných křivek *).

Nechť $f \in H(U)$

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$$

Dk

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz \overset{\text{Věta}}{\underset{15.4}{=}} \int_{\partial\Omega} (f_1, -f_2)\cdot \vec{ds} + i \int_{\partial\Omega} (f_2, f_1)\cdot \vec{ds}$$

$$\overset{\text{Greenova}}{\underset{\text{věta}}{=}} \int_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dx\,dy}_{<+\infty} + i \int_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) dx\,dy}_{<+\infty}$$

$$\overset{(CR)}{\underset{\text{podmínky}}{=}} 0$$

■

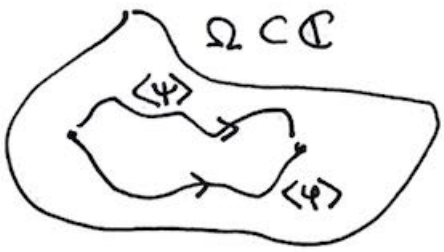
$\boxed{\text{Věta 15.6}}$ Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a omezená a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá.
Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) f má v Ω primitivní funkci, tzn. $\exists\, F : \Omega \to \mathbb{C}$ tak, že $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

(ii) Pro každou uzavřenou regulární křivku γ platí Lépe: pro $\forall$ konečný součet regulárních křivek

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

(iii) Křivkový integrál nezávisí na volbě křivky v Ω, tj.
je-li $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ a $\psi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ a $\varphi(a) = \psi(a)$ a $\varphi(b) = \psi(b)$
pak
$$\int_{\langle\varphi\rangle} f(z)\,dz = \int_{\langle\psi\rangle} f(z)\,dz.$$



---

*) tak, aby (hranice) platila Greenova věta (dokazovali jsme si ji jen pro obdélník)

Dk $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Připomíná důkaz věty o potenciálu

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

parametrizace φ: $\varphi(a)=\varphi(b)$ uzavřená

$$\overset{\text{řetízkové pravidlo}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}\left[F(\varphi(t))\right]dt$$

$$\overset{\text{Newtonův vzoreček}}{=} F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Označme $\gamma := \langle\varphi\rangle - \langle\psi\rangle$, pak γ je uzavřená křivka

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\langle\varphi\rangle-\langle\psi\rangle} f(z)\,dz = \int_{\langle\varphi\rangle} f(z)\,dz - \int_{\langle\psi\rangle} f(z)\,dz,$$ což dává tvrzení.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Zvolme $z_0 \in \Omega$ libovolně a definujme

$$F(z) := \int_{\gamma_{z_0,z}} f(z)\,dz$$

kde $\gamma_{z_0,z}$ je libovolná regulární křivka spojující z_0 a z

Dle (iii) je tato definice smysluplná (nezáleží na volbě křivky)

Pro h malé, a pro $z+h$ uvažujme křivku tvořenou součtem $\gamma_{z_0,z}$ a úsečky spojující z a $z+h$. Pak

označme ji $[z;z+h]$

$$(*\bullet) \quad \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z;z+h]} f(z)\,dz = \int_0^1 f(z+th)\,dt$$

$\varphi: \underset{[0,1]}{t} \mapsto \underset{\mathbb{C}}{z+th}$ je parametrizace úsečky

$\varphi'(t) = h$

avšak:

$$\left|\int_0^1 f(z+th) - f(z)\right| = \left|\int_0^1 [f(z+th)-f(z)]\,dt\right|$$

$$\le \int_0^1 \underbrace{|f(z+th)-f(z)|}_{\to 0 \text{ pro } h\to 0}\,dt \to 0 \quad \text{pro } h \to 0.$$

Z $(*\bullet)$: $$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(z) \quad \text{neboli} \quad F'(z) = f(z).$$

$\boxed{\text{Shrnutí}}$ Za předpokladů vět 15.5 a 15.6 platí:

<u>Je-li</u> $f \in H(\mho)$, $\Omega \subset \mho \subset \mathbb{C}$ otevřené, omezená, souvislá

<u>pak</u> existuje $F : \Omega \to \mathbb{C}$ <u>tak, že</u> $F'(z) = f(z)$

a navíc lze psát $\boxed{F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\lambda)\, d\lambda := \int_{[z_0; z]} f(\lambda)\, d\lambda}$

neboť definice nezávisí na volbě křivky, které jdou z z_0 do z, kde $z_0 \in \Omega$ je pevné

Tomuto pozorování se říká <u>základní věta integrálního počtu</u> pro <u>komplexní funkce komplexní proměnné</u>.

[Srovnej s hlavní větou integrálního & diferenciálního počtu jedné reálné proměnné.]

<u>Příklady</u>

(1) Uvažuj $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$ a křivku $\underbrace{\varphi(t) = re^{it} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle}_{\text{uzavřená regulární}}$

$\boxed{\text{Spočtěme: } \int_{\langle\varphi\rangle} f(z)\, dz}$

Řešení:

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f(z)\, dz \overset{df.}{=} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, ire^{it}\, dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)t}\, dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{i(k+1)t}}_{\cos(k+1)t + i\sin(k+1)t}\, dt$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq -1 \\ 2\pi i & k = 0 \end{cases}$$

Tedy speciálně pozorujeme, že

$f(z) = \frac{1}{z}$ nemá primitivní funkci v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Kdyby primitivní funkce F existovala pak

$$0 = F(r) - F(r) = F(\varphi(2\pi)) - F(\varphi(0)) = \int_{\langle\varphi\rangle} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \text{ spor}$$