1. Najděte polohu těžiště homogenní řetězovky

$$y = a\cosh\frac{x}{a}$$

od bodu $(0, a)$ do bodu (b, h).

Souřadnice těžíště dostaneme podílem

$$\vec{r} = \frac{\int_a^b f(\vec{\varphi}(t))|\vec{\varphi}(t)|dt}{\int_a^b |\vec{\varphi}(t)|}$$

Potřebujeme si tedy vyjádřit křivku parametricky a určit meze ze zadání. Nejjednodušeji určíme $x = at,\ y = a\cosh(t)$ pro $0 \leq t \leq \frac{b}{a} = \operatorname{arccosh}\frac{h}{a}$, h tedy nemusíme příliš řešit, protože je svázané s ostatními parametry tak aby druhý bod skončil na křivce. Nakonec spočteme normu

$$|\vec{\varphi}(t)| = \sqrt{(a)^2 + (-a\sinh(t))^2} = a\cosh(t)$$

A nakonec spočítáme souřadnice těžiště

$$(x, y) = \frac{a\int_0^{\frac{a}{b}} (at, a\cosh t)\cosh t\ dt}{a\int_0^{\frac{a}{b}} \cosh t\ dt} = \begin{pmatrix} \int t\cosh t\ dt \overset{(P.P.)}{=} t\sinh t - \cosh t \\ \int \cosh^2 t\ dt = \int \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1)\ dt = \frac{1}{2}(x + \sinh x\cosh x) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{b\sinh\frac{b}{a} - a\cosh\frac{b}{a} + a}{\sinh\frac{b}{a}}, \frac{\frac{a}{4}\sinh\frac{2b}{a} + \frac{b}{2}}{\sinh\frac{b}{a}}\right) = \left(\frac{b\sinh\frac{b}{a} - h + a}{\sinh\frac{b}{a}}, \frac{\frac{a}{4}\sinh\frac{2b}{a} + \frac{b}{2}}{\sinh\frac{b}{a}}\right)$$

2. Vypočítejte

$$\int_C (2a - y)\ dx + x\ dy,$$

kde C je úsek cykloidy $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

Vzhledem k tomu, že známe interval v kterém se pohybuje t a máme parametrické vyjádření tak jednoduše dosadíme do integrálu a vytkneme dt tedy budeme muset řešit pouze jeden integrál

$$\int_C (2a - y)\ dx + x\ dy = \int_C (2a - a(1 - \cos t))\ dx + a(t - \sin t)\ dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a + a\cos t)(a - a\cos t)\ dt + (at - a\sin t)(a\sin t)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2 - a^2\cos^2 t + a^2 t\sin t - a^2\sin^2 t\right)\ dt = a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\ dt = -2a^2\pi$$

3. Vypočítejte

$$I = \int_C (\exp(x)\sin y - my)\ dx + (\exp(x)\cos y - m)\ dy,$$

kde C je horní půlkružnice $x^2 + y^2 = xa$, probíhající od $(a, 0)$ do $(0, 0)$. Návod: Doplňte C do vhodné uzavřené křivky.

Vyjádříme si půlkružnici parametricky $x = \frac{a}{2}\cos t + \frac{a}{2},\ y = \frac{a}{2}\sin t$ z čehož plyne $dx = -\frac{a}{2}\sin dt,\ dy = \frac{a}{2}\cos t dt$. Dosadíme zpět do integrálu ze zadání.

$$\int_0^{\pi} \left(\exp\left(\frac{a}{2}\cos t + \frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\sin t\right) - m\frac{a}{2}\sin t\right)\left(-\frac{a}{2}\sin\right)dt + \left(\exp\left(\frac{a}{2}\cos t + \frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\sin t\right) - m\right)\left(\frac{a}{2}\cos t\right)dt$$

dt si vytkneme a integrujeme velké členy bez m

$$\frac{a}{2}\exp\left(\frac{a}{2}\right)\int_0^{\pi}\left(-\sin t\sin\left(\frac{a}{2}\sin t\right)\exp\left(\frac{a}{2}\cos t\right)+\cos t\cos\left(\frac{a}{2}\sin t\right)\exp\left(\frac{a}{2}\cos t\right)\right)dt+$$
$$+\int_0^{\pi}\left(m\frac{a^2}{4}\sin^2 t-m\frac{a}{2}\cos t\right)dt$$

Nejdříve budeme řešit první integrál pomocí per-partes. Integrujeme funkce se sinem

$$\int_0^{\pi}\left(\cos t\cos\left(\frac{a}{2}\sin t\right)\exp\left(\frac{a}{2}\cos t\right)\right)dt=\left(\begin{array}{c} u=\frac{a}{2}\sin t\\ du=\frac{a}{2}\cos t\ dt\end{array}\right)=$$
$$=\left[\exp\left(\frac{a}{2}\cos t\right)\int\frac{2}{a}\cos u\ du\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{a}{2}\sin t\exp\left(\frac{a}{2}\cos t\right)\int\frac{2}{a}\cos u\ du\ dt=$$
$$=\left[\exp\left(\frac{a}{2}\cos t\right)\frac{2}{a}\sin\left(\frac{a}{2}\sin t\right)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin t\exp\left(\frac{a}{2}\cos t\right)\sin\left(\frac{a}{2}\sin t\right)=$$
$$=0+\int_0^{\pi}\sin t\exp\left(\frac{a}{2}\cos t\right)\sin\left(\frac{a}{2}\sin t\right)$$

Ovšem tento integrál se nám tam naštěstí opakuje a tudíž celá tato obludnost se rovná nule! Nakonec nám zbyde

$$m\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\sin^2 t\ dt-m\frac{a}{2}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos t\ dt}_{=0}=m\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\ dt=m\frac{a^2}{8}\pi$$