Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	7	7	5	5	6	6	36
Získáno							

[7] 1. Najděte Taylorův rozvoj funkce

$$f(x) =_{\mathrm{def}} \int_{\xi=0}^{\sin x} \mathrm{e}^{3\xi} \sin\xi \,\mathrm{d}\xi$$

v bodě $x_0 = 0$ do třetího řádu, aneb najděte koeficienty $\{a_i\}_{i=0}^3$ tak, aby pro $x \to 0$ platilo

$$\int_{\xi=0}^{\sin x} \mathrm{e}^{3\xi} \sin\xi \,\mathrm{d}\xi = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + O\left(x^4\right).$$

Řešení:

Použijeme známé vztahy pro funkce e^z a $\sin z$ pro $z \to 0$,

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + O\left(z^4\right),$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + O\left(z^4\right).$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}
\int_{\xi=0}^{\sin x} \mathrm{e}^{3\xi} \sin\xi \,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\sin x} \left(1 + 3\xi + \frac{9}{2!}\xi^2 + \frac{27}{3!}\xi^3 + O\left(\xi^4\right)\right)\left(\xi - \frac{\xi^3}{3!} + O\left(\xi^4\right)\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\xi=0}^{\sin x} \left(\xi + 3\xi^2 + O\left(\xi^3\right)\right) \mathrm{d}\xi = \left[\frac{\xi^2}{2} + \xi^3 + O\left(\xi^4\right)\right]_{\xi=0}^{\sin x} = \frac{(\sin x)^2}{2} + (\sin x)^3 + O\left(x^4\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + O\left(x^4\right)\right)^2 + x^3 + O\left(x^4\right) = \frac{x^2}{2} + x^3 + O\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Případně můžeme použít základní větu diferenciálního a integrálního počtu a větu o derivaci složené funkce, ze kterých plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\xi=0}^{\sin x} \mathrm{e}^{3\xi} \sin\xi \,\mathrm{d}\xi\right) = \left[\mathrm{e}^{3\xi} \sin\xi\right]_{\xi=\sin x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \mathrm{e}^{3\sin x} \sin(\sin x) \cos x,$$

což znamená, že umíme spočít libovolnou derivaci námi zkoumané funkce. Následně můžeme použít vztah mezi derivacemi $f(x)$ a koeficienty Taylorova rozvoje,

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^n &= f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x - x_0)\right|_{x=x_0} + \frac{1}{2!} \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 \\
&+ \frac{1}{3!} \left.\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} \left.\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^4 + \frac{1}{5!} \left.\frac{\mathrm{d}^5 f}{\mathrm{d}x^5}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^5 + \cdots
\end{aligned}$$

[7] 2. Budiž dána funkce $f : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mapsto \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\sin x \,(\sin y)^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

a) Dodefinujte funkci f v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ vhodným způsobem tak, aby nově definovaná funkce byla spojitá v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Spojitost vámi definované funkce jasně odůvodněte.

b) Pro vámi dodefinovanou funkci spočtěte *dle definice* parciální derivace podle x a y v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

c) Zjistěte, zda pro vámi dodefinovanou funkci existuje totální diferenciál $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Pokud ano, spočtěte ho.

Řešení:

Aby byla nově definovaná funkce, označme si ji kupříkladu f_{ext}, spojitá, musí platit

$$f_{\text{ext}} = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \\ L, & \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

kde

$$L = \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin x \,(\sin y)^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(Funkce je v daném bodě spojitá právě když je funkční hodnota v daném rovná limitě.) Spočteme tedy limitu. Nejdříve prozkoumáme limitu "po přímkách". Volíme tedy $x = s$ a $y = ks$, kde $k \in \mathbb{R}$, a zkoumáme limitu $s \to 0+$,

$$\lim_{s\to 0+} \frac{\sin s \,(\sin(ks))^3}{\left(s^2 + (ks)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{s\to 0+} \frac{\sin s}{s} \left(\frac{\sin(ks)}{ks}\right)^3 \frac{k^3 s^4}{s^3 \left(1+k^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

přičemž limita je nezávislá na k. Jedinná možnost ohledně volby L je tedy nula. Musíme ovšem ukázat, že nula je limita ve smyslu funkcí více proměnných, limita po přímkách nám ke spojitosti nestačí. Jest ovšem

$$0 \leq \left| \frac{\sin x\,(\sin y)^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - L \right| = \frac{|\sin x|\,|\sin y|^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{|x|\,|y|^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \|\boldsymbol{x}\|_{2,\mathbb{R}^2},$$

kde jsme využili známé nerovnosti $|\sin x| \leq |x|$. Z výše uvedené nerovnosti a z věty o limitě sevřené funkce pak plyne

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{\sin x\,(\sin y)^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Spočteme parciální derivace. (Opusťme nyní značení f_{ext} pro rozšířenou funkci, a značme-ji prostě f.) Definice parciální derivace vůči proměnné x v bodě $\boldsymbol{x}_0$ je

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{e}_{\hat{x}}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h},$$

kde $\boldsymbol{e}_{\hat{x}}$ je vektor ve směru osy x, $\boldsymbol{e}_{\hat{x}} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. V námi zkoumaném případě je $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ a dostaneme tedy

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h(\sin 0)^3}{(h^2+0^2)^{\frac{3}{2}}} - 0}{h} = 0.$$

Obdobně postupujeme v případě parciální derivace $\left.\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$. Jest

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin 0(\sin h)^3}{(0+h^2)^{\frac{3}{2}}} - 0}{h} = 0.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 0,$$

z čehož plyne, že kandidátem na totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ je nulové lineární zobrazení,

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 0,$$

kde $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_1 \\ \mathrm{h}_2 \end{bmatrix}$ je libovolný vektor z $\mathbb{R}^2$. Ověříme, že toto zobrazení vyhovuje požadavkům na totální diferenciál, musíme tedy ověřit, že

$$\left| f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} \right| = o\left(\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2} \right),$$

kde $\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}$ značí standardní Eukleidovskou normu v $\mathbb{R}^2$, tedy $\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.) Definici lze ekvivalentním způsobem přepsat jako

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}} \frac{\left| f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} \right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} = 0.$$

Dosazením do definice funkce f a s použitím předpokládaného vztahu pro totální diferenciál $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 0$ dostaneme

$$\frac{\left| f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} \right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} = \frac{\left| \frac{\sin h_1 (\sin h_2)^3}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}} = \left| \frac{\sin h_1 \left(\sin h_2\right)^3}{\left(h_1^2 + h_2^2\right)^2} \right|.$$

Tento výraz je nám od pohledu podezřelý, neboť čitatel je stejného řádu jako jmenovatel. (Uvědomíme si, že $\sin h_1 \approx h_1$ a $\sin^3 h_2 \approx h_2^3$.) Zkusme si tedy nejdříve spočíst limitu "po přímkách" $h_1 = s$, $h_2 = ks$, kde $k \in \mathbb{R}$ a $s \to 0+$. Jest

$$\lim_{s \to 0+} \frac{\sin s \left(\sin\left(ks\right)\right)^3}{s^4 \left(1 + k^2\right)^2} = \lim_{s \to 0+} \frac{\sin s}{s} \frac{\sin^3\left(ks\right)}{\left(ks\right)^3} \frac{k^3}{\left(1 + k^2\right)^2} = \frac{k^3}{\left(1 + k^2\right)^2}.$$

Limita "po přímkách" zjevně závisí na k, což znamená, že limita funkce více proměnných

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}} \frac{\left| f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} \right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2}}$$

pro danou volbu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}$ neexistuje. Nulové lineární zobrazení $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}$ tedy není totální diferenciál příslušné funkce v bodě $\boldsymbol{x}_0$, což znamená, že jediný kandidát na totální diferenciál selhal, a totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{x}_0$ proto *neexistuje.*

[5] 3. Zjistěte, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right).$$

Řešení:

Jelikož pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin x < x$, je z geometrické interpretace inverzní funkce vidět, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\arcsin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n} > 0$, a řada, kterou zkoumáme je tedy řada s kladnými členy. Z Taylorova rozvoje funkce $\arcsin x$ v okolí bodu $x_0 = 0$,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right),$$

který si hbitě spočteme ze znalosti derivací fuknce $\arcsin x$, a z Taylorova rozvoje funkce $\sin x$ v okolí bodu $x_0 = 0$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right),$$

vidíme, že

$$\arcsin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Z této rozvahy je vidět, že konvergenci dané řady snadno posoudíme limitním srovnávacím kritériem s (konvergentní) řadou $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$. Jest

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{3n^3}} = 1,$$

a námi zkoumaná řada je tedy konvergentní dle limitního srovnávacího kritéria.

[5] 4. Najděte všechna maximální obecná řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{3y}{x} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}.$$

Poté najděte maximální řešení počáteční úlohy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{3y}{x} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3},$$
$$y(x)|_{x=-1} = 0.$$

Řešení:

Rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru. Jest

$$\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(|x|^3\right),$$

integrační faktor $\mathrm{e}^{\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x}$ je tedy $|x|^3$. Uvažujme nejprve $x \in (0, +\infty)$. Po pronásobení rovnice integračním faktorem x^3 dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3 y\right) = \mathrm{e}^x,$$

což po jednoduché integraci vede na

$$x^3 y = \mathrm{e}^x + C,$$

kde C je integrační konstanta. Řešením rovnice je (na požadovaném intervalu) tudíž funkce

$$y = \frac{\mathrm{e}^x + C}{x^3}.$$

Uvažujme nyní $x \in (-\infty, 0)$. Po pronásobení rovnice integračním faktorem $-x^3$ dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-x^3 y\right) = -\mathrm{e}^x,$$

což po jednoduché integraci vede na

$$-x^3 y = -\mathrm{e}^x + A,$$

kde A je integrační konstanta. Řešením rovnice je (na požadovaném intervalu) tudíž funkce

$$y = \frac{\mathrm{e}^x + A}{x^3}.$$

Maximálnímmi řešeními rovnice jsou tudíž funkce

$$y = \frac{\mathrm{e}^x + C}{x^3}, \qquad x \in (0, +\infty),$$
$$y = \frac{\mathrm{e}^x + A}{x^3}, \qquad x \in (-\infty, 0).$$

Zadáme-li počáteční podmínku $y(x)|_{x=-1} = 0$, snadno určíme konstantu A a vidíme, že řešením počáteční úlohy je

$$y = \frac{\mathrm{e}^{x+1} - 1}{\mathrm{e}x^3},$$

přičemž $x \in (-\infty, 0)$. Toto řešení je maximální.

[6] 5. Uvažujte funkci $f : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) =_{\text{def}} x^2 + 3\mathrm{e}^y.$$

a) Napište rovnici tečné roviny ke *grafu* funkce f v bodě

$$\boldsymbol{a} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

aneb napište rovnici tečné roviny k ploše S popsané jako $S = \left\{ \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^3 | \, z = f(x, y) \right\}$.

b) Najděte bod/body, ve kterých tato funkce nabývá minima na množině

$$M = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \right\}.$$

Řešení:

Rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ v bodě

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

lze s pomocí totálního diferenciálu zapsat jako

$$z = f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} \left[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} \right],$$

kde jsme označili

$$\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

(Připomeňte si, že z definice totálního diferenciálu víme, že $f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} \left[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} \right]$ je nejlepší lineární aproximace funkce $f(\boldsymbol{x})$ na okolí bodu $\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}$.) Případně lze použít gradient

$$z = f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \nabla f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} \bullet \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} \right).$$

Rozepíšeme-li obě jmenované rovnice, dostaneme

$$z = f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \left. \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} (x - a_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} (y - a_2).$$

Spočteme parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) &= 3\mathrm{e}^y, \end{aligned}$$

a po dosazení dostaneme

$$z = 3y + 3,$$

což je hledaná rovnice tečné roviny.

Zabývejme se druhou částí úlohy. Víme, že bod, ve kterém funkce nabývá minima bude ležet buď uvnitř množiny M nebo na její hranici. Nejdříve vyšetříme, podmínku na extrémy uvnitř M. Hledáme tedy body $\boldsymbol{x}_{\text{ext}}$, kde vymizí gradient, aneb potřebujeme vyřešit rovnici

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} = \mathbf{0}.$$

Rutinní výpočet dává

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} \\ 3\mathrm{e}^y|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} \end{bmatrix}.$$

Bod $\boldsymbol{x}_{\text{ext}}$ podezřelý z extrému tedy musí řešit rovnici

$$\begin{bmatrix} 2x_{\text{ext}} \\ 3\mathrm{e}^{y_{\text{ext}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tato soustava rovnic zjevně nemá řešení a uvnitř množiny M se nenachází žádný bod podezřelý z extrému. Nezbývá tedy, než hledat minimum na hranici množiny M. To provedeme pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Hledáme totiž extrém funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině ∂M, což je množina popsaná rovnicí (vazbou) $g(\boldsymbol{x}) = 0$, kde

$$g(\boldsymbol{x}) =_{\text{def}} x^2 + (y-1)^2 - 1.$$

Sestavíme si pomocnou funkci

$$f_\lambda(\boldsymbol{x}) =_{\text{def}} f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x}),$$

což v našem případě vede na

$$f_\lambda(\boldsymbol{x}) =_{\text{def}} x^2 + 3\mathrm{e}^y - \lambda\left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right).$$

Podmínka na extrém je

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} f_\lambda(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} = \boldsymbol{0},$$

přičemž bod $\boldsymbol{x}_{\text{ext}}$ musí samozřejmě splňovat $g(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}) = 0$. Spočteme si gradient pomocné funkce

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} f_\lambda(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})\right)\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})\right)\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{\text{ext}} - 2\lambda x_{\text{ext}} \\ 3\mathrm{e}^{y_{\text{ext}}} - 2\lambda\left(y_{\text{ext}} - 1\right) \end{bmatrix}.$$

Podmínka $\nabla_{\boldsymbol{x}} f_\lambda(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\text{ext}}} = \boldsymbol{0}$ spolu s vazbou $g(\boldsymbol{x}_{\text{ext}}) = 0$ tedy vede na následující systém tří algebraických rovnic pro bod polohu body podezřelého z extrému $\boldsymbol{x}_{\text{ext}}$ a Lagrangeův multiplikátor λ,

$$\begin{aligned} 2x_{\text{ext}} - 2\lambda x_{\text{ext}} &= 0, \\ 3\mathrm{e}^{y_{\text{ext}}} - 2\lambda\left(y_{\text{ext}} - 1\right) &= 0, \\ x_{\text{ext}}^2 + (y_{\text{ext}} - 1)^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Při řešení systému je výhodné začít eliminací Lagrangeova multiplikátoru. Vynásobíme-li první rovnici $(y_{\text{ext}} - 1)$ a odečteme-li od ní druhou rovnice přenásobenou x_{ext}, dostaneme rovnici

$$x_{\text{ext}}\left(2y_{\text{ext}} - 2 - 3\mathrm{e}^{y_{\text{ext}}}\right) = 0.$$

Z této rovnice rovnice plyne, že buď

$$x_{\text{ext}} = 0,$$

nebo

$$2y_{\text{ext}} = 2 + 3\mathrm{e}^{y_{\text{ext}}}.$$

Druhou z těchto rovnic nelze na M vyřešit, neboť pro všechna $y \in M$ platí $2 + 3\mathrm{e}^y \geq 5$, z čehož plyne, že by muselo být $2y_{\text{ext}} \geq 5$. Takovýto bod by ovšem do množiny M nepatřil. Nazbývá nám tedy než se smířit s variantou $x_{\text{ext}} = 0$. Je-li $x_{\text{ext}} = 0$, pak si z rovnice pro vazbu přečteme, že odpovídající y_{ext} řeší rovnici $(y_{\text{ext}} - 1)^2 - 1 = 0$, což znamená, že body podezřelé z extrému jsou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\text{ext},1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{x}_{\text{ext},2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zbývá rozhodnout, který z nalezených bodů $\boldsymbol{x}_{\text{ext},1}$, $\boldsymbol{x}_{\text{ext},2}$ je bodem, ve kterém funkce nabývá minima. Nezatěžujeme se výpočtem matice druhých derivací, neboť situace je v tomto případě jasná. Dosadíme-li si do funkce f, dostaneme $f(\boldsymbol{x}_{\text{ext},1}) = 3$, zatímco $f(\boldsymbol{x}_{\text{ext},2}) = 3\mathrm{e}^2 > 3$, a funkce f proto nabývá minima v bodě $\boldsymbol{x}_{\text{ext},1}$.

Při výpočtu se lze případně obejít i bez Lagrangeova multiplikátoru. Množina vymezená předpisem $g(x) = 0$ je kružnice se středem v bodě $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$, a tuto křivku dokážeme snadno parametrizovat, jest

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi, \\ y &= 1 + \sin\varphi, \end{aligned}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Pohybujeme-li se tedy po kružnici, aneb měníme-li φ, pak funkce $f(\boldsymbol{x})$ nabývá hodnot

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\varphi) = \cos^2\varphi + 3\mathrm{e}^{1+\sin\varphi},$$

a úlohu jsme tedy převedli na hledání extrému reálné funkce *jedné* reálné proměnné. Najít extrém reální funkce reální proměnné je snadné, hledáme φ tak, aby platilo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi} = 0,$$

což znamená, že potřebujeme vyřešit rovnici

$$-2\cos\varphi_{\mathrm{ext}}\sin\varphi_{\mathrm{ext}} + 3\mathrm{e}^{1+\sin\varphi}\cos\varphi_{\mathrm{ext}} = 0,$$

odkud plyne, že je nutné zvolit $\cos\varphi_{\mathrm{ext}} = 0$. To nastane v případě $\varphi_{\mathrm{ext}} = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi_{\mathrm{ext}} = \frac{3}{2}\pi$. Odpovídající body v $\mathbb{R}^2$ dostaneme dosazením do předpisu pro parametrizaci kružnice. Body podezřelé z extrému jsou tedy

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Což je kupodivu totéž jako v případě, kdy jsme provedli výpočet za použítí Lagrangeova multiplikátoru.

[6] 6. Uvažujte funkce $y_1(x_1, x_2)$ a $y_2(x_1, x_2)$, které jsou jakožto funkce proměnných x_1 a x_2, zadány implicitně soustavou rovnic

$$x_1^2 \mathrm{e}^{y_2} + y_1 \ln x_2 - \mathrm{e} = 0,$$
$$x_1 y_1 + x_2 \mathrm{e}^{y_2} - (2 + \mathrm{e}) = 0.$$

Vypočtěte $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$ v bodě $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$. (Pro úplnost zdůrazňujeme, že řešením úlohy jsou dvě čísla – číslené hodnoty derivací $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$ v příslušném bodě.)

Řešení:

K zodpovězení otázky použijeme větu o implicitních funkcích. Označme si

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

a dále

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$$

a konečně

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \mathrm{e}^{y_2} + y_1 \ln x_2 - \mathrm{e} \\ x_1 y_1 + x_2 \mathrm{e}^{y_2} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix}.$$

Nejprve najdeme bod $\boldsymbol{y}_0$, který společně s $\boldsymbol{x}_0$ řeší rovnici

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0},$$

aneb chceme, aby platilo

$$\begin{bmatrix} \left(x_1^0\right)^2 \mathrm{e}^{y_2^0} + y_1^0 \ln x_2^0 - \mathrm{e} \\ x_1^0 y_1^0 + x_2^0 \mathrm{e}^{y_2^0} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což po dosazení za $\boldsymbol{x}_0$ vede na soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{y_2^0} - \mathrm{e} \\ y_1^0 + \mathrm{e}^{y_2^0} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což dává

$$\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Symbol x_1^0 značí první složku vektoru $\boldsymbol{x}_0$, horní index 0 není exponent! Symbol $\left(x_1^0\right)^2$ značí druhou mocninu x_1^0.) Připomeneme si formální výpočet dle věty o implicitních funkcích. Je-li $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$, pak

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0},$$

odkud

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}},$$

přičemž jsme použili značení

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

V našem konkrétním případě dostaneme

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2x_1 \mathrm{e}^{y_2} & \frac{y_1}{x_2} \\ y_1 & \mathrm{e}^{y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \ln x_2 & x_1^2 \mathrm{e}^{y_2} \\ x_1 & x_2 \mathrm{e}^{y_2} \end{bmatrix}.$$

Zajímají nás hodnoty v bodě $\boldsymbol{x}_0$. (Připomeňme si, že $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$.) Po dosazení dostaneme

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e} & 2 \\ 2 & \mathrm{e} \end{bmatrix}, \qquad \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e} \\ 1 & \mathrm{e} \end{bmatrix}, \qquad \left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} \mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Požadované derivace najdeme dosazením do vztahu

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

což dává

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \frac{1}{\mathrm{e}}\begin{bmatrix} \mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\mathrm{e} & 2 \\ 2 & \mathrm{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}-2 & 2-\mathrm{e} \\ -1 & -\frac{2}{\mathrm{e}} \end{bmatrix}$$

a proto

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 2\left(\mathrm{e}-1\right),$$
$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{2}{\mathrm{e}}.$$