Jméno: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	12	12	36
Získáno					

[6] 1. Najděte $c \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+x-c}\right) = 2.$$

Řešení:

Nejprve provedeme jednoduchou algebraickou úpravu

$$\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+x-c}\right) = x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{c}{x^2}}\right)$$

$$= x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{c}{x^2}}\right) = x^2\frac{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\left(1+\frac{1}{x}-\frac{c}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}-\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1+c}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}-\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

kde jsme použili vzorec $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$, přičemž jsme položili

$$a =_{\mathrm{def}} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}},$$
$$b =_{\mathrm{def}} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}}.$$

Podle věty o limitě složené funkce a limitě součinu tedy zjevně platí

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+x-c}\right) = \frac{1+c}{3},$$

a požadovanou hodnotu limity obdržíme pokud zvolíme c jako řešení rovnice

$$\frac{1+c}{3} = 2,$$

odkud $c = 5$.

[6] 2. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x}\right).$$

Řešení:

Použijeme goniometrický vzorec

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

a provedeme standardní algebraické úpravy,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\\&=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1+x-x}{2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}\cos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\cos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}.\end{aligned}$$

Podle věty o limitě složené funkce a limitě součinu zjevně platí, že

$$\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=0,$$

přičemž funkce $\cos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}$ je omezená neboť pro libovolné $x\in\mathbb{R}$ platí $\left|\cos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\right|\leq 1$. Podle věty limitě sevřené funkce (věta o dvou strážnících) tedy platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x}\right)=0.$$

[12] 3. Spočtěte

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{2x}}{e^{3x} - 1} dx$$

na maximálních možných intervalech (a ty určete).

Řešení:

Integrand není definovaný pro $x = 0$ (jmenovatel je v tomto případě nulový). Na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ je integrand spojitý a bude na nich mít primitivní funkci.

Zaveďme nejprve jednoduchou substituci (1. substituční metoda)

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{2x}}{e^{3x} - 1} dx = \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{t^3 + 2t}{t^3 - 1} dt.$$

Stupeň polynomu v čitateli je stejný jako ve jmenovateli, proveďme proto následující úpravu

$$\int \frac{t^3 + 2t}{t^3 - 1} dt = \int \frac{t^3 - 1 + 1 + 2t}{t^3 - 1} dt = \int 1 dt + \int \frac{1 + 2t}{t^3 - 1} dt = t + \int \frac{1 + 2t}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} dt. \tag{1}$$

Věnujme se nyní poslednímu integrálu, který už je ve vhodném tvaru pro rozklad na parciální zlomky (polynom $t^2 + t + 1$ je ireducibilní)

$$\int \frac{1 + 2t}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} dt = \int \left(\frac{A}{t - 1} + \frac{Bt + C}{t^2 + t + 1} \right) dt,$$

kde pro reálné konstanty A, B, C platí

$$1 + 2t = A\left(t^2 + t + 1\right) + (Bt + C)(t - 1).$$

Dosazením $t = 1$ dostaneme $A = 1$. Srovnání kvadratických členů (t^2) potom dává $B = -1$ a srovnání absolutních členů (t^0) dává $C = 0$. Dohromady tedy dostáváme

$$\int \frac{1 + 2t}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} dt = \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{t}{t^2 + t + 1} \right) dt = \ln|t - 1| - \int \frac{t}{t^2 + t + 1} dt. \tag{2}$$

Zabývejme se opět jenom posledním integrálem. Čitatel si upravíme tak, aby se v něm objevila derivace jmenovatele

$$\int \frac{t}{t^2 + t + 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + t + 1} dt. \tag{3}$$

První integrál na pravé straně rovnice (3) vyřešíme první substituční metodou

$$\frac{1}{2} \int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1} dt = \left| \begin{array}{c} u = t^2 + t + 1 \\ du = (2t + 1)\, dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + t + 1\right) + c, \tag{4}$$

kde jsme se v poslední rovnosti zbavili absolutní hodnoty v argumentu logaritmu, neboť výraz $t^2 + t + 1$ je vždy kladný.

Druhý integrál na pravé straně rovnice (3) vyřešíme doplněním jmenovatele integrandu na úplný čtverec a následnou substitucí (opět 1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + t + 1} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} = \left| \begin{array}{c} v = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right) \\ dv = \frac{2}{\sqrt{3}} t dt \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{v^2 + 1} dv = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan v + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) + c. \end{aligned} \tag{5}$$

Celkově tedy dostáváme poskládáním výsledků (1), (2), (3), (4) a (5)

$$\int \frac{t^3 + 2t}{t^3 - 1} dt = t + \ln|t - 1| - \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + t + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) + c,$$

což nám po návratu k substituci $t = e^x$ dává hledanou primitivní funkci

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{2x}}{e^{3x} - 1} dx = e^x + \ln|e^x - 1| - \frac{1}{2} \ln\left(e^{2x} + e^x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x + \frac{1}{2}\right)\right) + c.$$

[12] 4. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x+2}{x}\right), & \text{pro } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení:

1. Funkce arctan je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, její argument pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V nule ovšem máme funkci dodefinovanou hodnotou $\frac{\pi}{2}$. Zadaná funkce je tedy definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. $D_f = \mathbb{R}$.

2. Pro $x \neq 0$ je funkce f spojitá (arctan a $\frac{x+2}{x}$ jsou spojité a jejich složení taktéž). Zkoumejme chování funkce v nule

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{x\to 0\pm} \arctan\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x\to 0\pm} \arctan\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

   Zadaná funkce je tedy spojitá zprava ($f(0) = \frac{\pi}{2}$), ale ne zleva, a tedy není v nule spojitá. Obor spojitosti je tedy $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Funkce není ani sudá ani lichá. Není ani periodická a nevykazuje ani žádné jiné symetrie.

4. Limity v krajních bodech definičního oboru vycházejí následovně

$$\lim_{x\to \pm\infty} \arctan\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x\to \pm\infty} \arctan\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

   Limity v bodech nespojitosti už jsme spočítali v bodu 2.

5. Průsečík s osou y je jasný ze zadání: $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Průsečík s osou x dostaneme vyřešením rovnice

$$\arctan\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0.$$

   Protože funkce arctan je nulová pouze v bodě 0, stačí řešit

$$\frac{x+2}{x} = 0,$$

   odkud už dostáváme $x = -2$.

6. Pro $x \neq 0$ je první derivace rovna

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{x}\right)^2} \cdot \frac{x - (x+2)}{x^2} = -\frac{1}{x^2 + 2x + 2}.$$

   Protože diskriminant kvadratické funkce ve jmenovateli $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ je záporný, dostáváme $D_{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Pro $x = 0$ je funkce f spojitá zprava (viz bod 2), můžeme tedy spočítat derivaci v $x = 0$ zprava

$$\frac{\mathrm{d}f_+}{\mathrm{d}x}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{1}{2}.$$

   Funkce f není v bodě $x = 0$ spojitá zleva a nemůže tak existovat derivace zleva v tomto bodě. Spočítejme aspoň limitu derivace pro x jdoucí k nule zleva

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{1}{2}.$$

7. Pro $x \neq 0$ je druhá derivace rovna

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{2x + 2}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2}.$$

   Podobně jako v bodě 6 dostváme $D_{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8. Z předpisu pro první derivaci vidíme, že se nikde nenuluje. Jediný kandidát na extrém je tedy v bodě nespojitosti – v bodě 0.

   Z podmínky nulové druhé derivace dostaneme kandidáty na inflexní body

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = 0 \iff x = -1.$$

   V bodě 0 není funkce spojitá a nemůže tam tedy mít ani inflexní bod.

   Definiční obor funkce tak můžeme podle významných bodů rozdělit na 3 intervaly a určit funkční hodnoty v těchto bodech a znaménka derivací na příslušných intervalech

	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$	$+\infty$
f	$\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\mp\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$		$-$	0	$+$		$+$	

(Zde rozumíme „funkční hodnotou“ v bodech $\pm\infty$ a 0 (jednostrannou) limitu v těchto bodech.)

Z tabulky výše pak dostáváme

(a) funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, na žádném intervalu není rostoucí

(b) v bodě 0 má funkce globální maximum, jiné extrémy nemá

(c) $R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

(d) funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, -1)$, konvexní na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, +\infty)$ a v bodě -1 má inflexní bod

9. Podle bodu 4 má funkce asymptotu v nekonečnu $y = \frac{\pi}{4}$. Kromě bodu 0 je funkce všude spojitá a v nule má konečné limity zprava i zleva, nemá tedy žádnou vertikální asymptotu.

10. Graf funkce f vypadá následovně