Termín pro odevzdání: pondělí 8.11. 2021

1. Metodou charakteristik najděte řešení dvou počátečních úloh

   a) Problém 1

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) + x\partial_x u(t,x) &= 0 && \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}\,,\\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{v } \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

   b) Problém 2

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) + x^2\partial_x u(t,x) &= 0 && \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}\,,\,,\\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{v } \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

   Zderivováním výsledku ověřte vaši odpověď. Proveďte též diskusi na jaké oblasti je řešení dané počáteční úlohy definované. Studujte asymptotické vlastnosti řešení pro $t \to \pm\infty$. Jsou řešení vždy jediná? Existuje vždy $\lim_{t\to\pm\infty} u(t,x)$? Pokud ano, čemu se limity rovnají?

2. Pomocí Fourierovy transformace řešte modifikaci transportní rovnice ze cvičení, kdy uvažujme explicitní časovou závislost rychlostního pole $\mathbf{b}(t)$:

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) + \mathbf{b}(t)\cdot\nabla_x u(t,x) &= 0 && \text{v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d\\
u(0,x) &= u_0(x) && \text{v } \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$