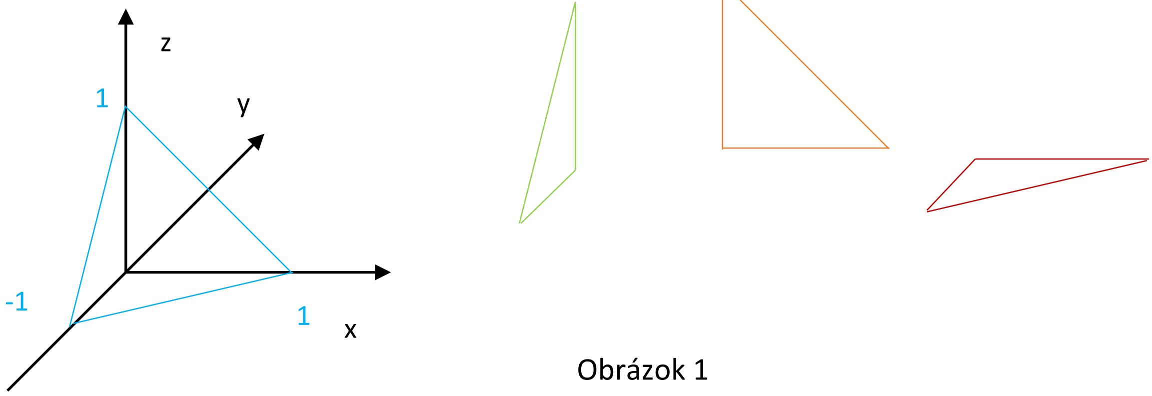
Príklad 1:

Spočítajte $\int_S \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS}$, kde $\vec{f} = (z, x, y)$ a S je časť plochy $x - y + z = 1$ obmedzená podmienkami $x \geq 0$, $z \geq 0$ a $y \leq 0$. Plocha S je orientovaná tak, že s vektorom v smere kladnej osy y zviera ostrý uhol.

Riešenie:



Obrázok 1

Z obrázka 1 vidíme, že plocha S tvorí jednu stenu štvorstenu. Jej normála je $\vec{n}_S = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. Integrál môžeme preto napísať ako:

$$-\int_S \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{S \cup T \cup V \cup W} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS} - \int_T \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS} - \int_V \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS} - \int_W \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS} \tag{1}$$

Kde $S \cup T \cup V \cup W$ tvorí plochu štvorstenu a S, T, V, W sú jeho jednotlivé steny. Spočítame všetky integrály na pravej strane vzťahu (1).

Plocha štvorstenu je uzavretá a preto môžeme použiť Gaussovu vetu:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{f}\, dxdydz \tag{2}$$

Divergencia je:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f_z) = 0 + 0 + 0 = 0 \tag{3}$$

Z využitím Gaussovej vety (2) a dosadením (3) dostávame pre štvorsten:

$$\int_{S \cup T \cup V \cup W} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dS} \overset{Gauss}{\triangleq} \int_{\text{objem}} \nabla \cdot \vec{f}\, dxdydz = \int_{\text{objem}} 0\, dxdydz = 0 \tag{4}$$

Pre jednotlivé steny štvorstenu počítame plošný integrál druhého druhu. Normály sú pre steny:

$$\vec{n}_T = (-1,0,0), \qquad \vec{n}_V = (0,1,0), \qquad \vec{n}_W = (0,0,-1) \tag{5}$$

Dosadením týchto normál (5) a s Využitím Fubiniho vety dostávame pre jednotlivé integrály:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_T \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} &= \int_T \vec{f}\cdot\vec{n}_T\,dS = \int_T (z,x,y)\cdot(-1,0,0)\,dS = \int_T -z\,dS \overset{Fubini}{\cong} \int_0^1\int_{-1+z}^0 -z\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 -z[y]_{-1+z}^0\,dz = -\int_0^1 z(1-z)\,dz = -\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\end{aligned}} \tag{6}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_V \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} &= \int_V \vec{f}\cdot\vec{n}_V\,dS = \int_V (z,x,y)\cdot(0,1,0)\,dS = \int_V x\,dS \overset{Fubini}{\cong} \int_0^1\int_0^{1-x} x\,dz\,dx \\ &= \int_0^1 x[z]_0^{1-x}\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dz = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\end{aligned}} \tag{7}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_W \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} &= \int_W \vec{f}\cdot\vec{n}_W\,dS = \int_W (z,x,y)\cdot(0,0,-1)\,dS = \int_W -y\,dS \overset{Fubini}{\cong} \int_0^1\int_{-1+x}^0 -y\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{y^2}{2}\right]_{-1+x}^0 dx = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\end{aligned}} \tag{8}$$

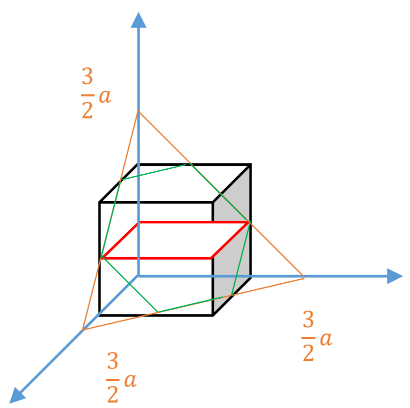
Po dosadení hodnôt integrálov (4), (6), (7), (8) do (1) dostávame:

$$\int_S \vec{f}\cdot\overrightarrow{dS} = -\left[0-\left(-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}$$

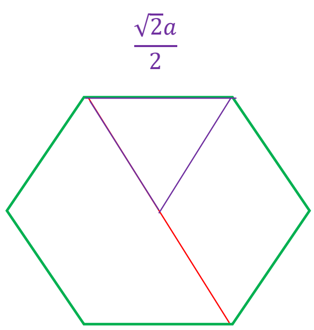
Príklad 2:

Spočítajte krivkový integrál $\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, kde uzavretá krivka C, ktorá vznikne prienikom stien kocky $[0,a^3]$ s rovinou $x+y+z=\frac{3}{2}a$ vymedzuje hranicu plochy S, ktorá je orientovaná kladne vzhľadom k vektoru $(1,1,1)$.

Riešenie:



Obrázok 2



Obrázok 3

Označíme si:

$$\vec{f} = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$$

Využijeme Stokesovu vetu:

$$\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{dS} = \int_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n}\, dS \tag{9}$$

kde uzavretá krivka C je šesťuholník z obrázka 2 a S jeho obsah .

Rotácia je:

$$\nabla \times \vec{f} = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y) = -2(y + z, z + x, x + y) \tag{10}$$

Z využitím Stokesovej vety (9) a dosadením rotácie (10) dostávame pre krivkový integrál:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} &= \int_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n}\, dS = -2\int_S (y + z, z + x, x + y) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} dS \\ &= \frac{-2}{\sqrt{3}} \int_S 2x + 2y + 2z\, dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \int_S x + y + z\, dS = \frac{-4}{\sqrt{3}} \int_S \frac{3}{2} a\, dS = -2\sqrt{3}a \int_S 1\, dS \end{aligned}} \tag{11}$$

kde sme v poslednej rovnosti využili vzťah $x + y + z = \frac{3}{2}a$ zo zadania.

Z využitím Pytagorovej vety vidíme, že ide o rovnostranný šesťuholník. Jeho obsah môžeme spočítať ako 6-krát obsah rovnostranného trojuholníka na obrázku 3. Strana tohto trojuholníka je polovica uhlopriečky štvorca o strane a na obrázku 2. Výšku rovnostranného trojuholníka spočítame pomocou Pytagorovej vety:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{4} - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{3}{8}}a$$

Ďalej si všimneme, že obsah tohto rovnostranného trojuholníka je rovnaký ako obsah obdĺžnika:

$$\int_{obdĺžnik} 1\, dS = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}a} \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{2}}} 1\, dx\, dy = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} a \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{16}} a^2 = \frac{1}{8}\sqrt{3}a^2 \tag{12}$$

Obsah šesťuholníka spočítame z (12) ako:

$$\int_S 1\, dS = 6 \int_{obdĺžnik} 1\, dS = 6\frac{1}{8}\sqrt{3}a^2 = \frac{3}{4}\sqrt{3}a^2 \tag{13}$$

Dosadením (13) do (11) dostávame:

$$\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = -2\sqrt{3}a \int_S 1\, dS = -2\sqrt{3}a \frac{3}{4}\sqrt{3}a^2 = -\frac{9}{2}a^3$$