1

1.1 Zadání

Pro všechny funkce $y = y(x)$ patřící do prostoru $C^3([0,1])$ spočti Gateauxův diferenciál funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(x^2 \sin(\pi y) + (y')^3 + y''y''' + ye^{-(y'')^2}\right) \mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

1.2 Řešení

Gateauxův diferenciál vypočítám jako

$$\delta\Phi[y](h) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 L(x,y+th,y'+th',y''+th'',y'''+th''')\mathrm{d}x\,,$$

kde symbolem L označuji integrovanou funkci. Po dosazení a rozepsání tak dostanu

$$\delta\Phi[y](h) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 \left(x^2 \sin(\pi y + th) + (y'+th')^3 + (y''+th'')(y'''+th''') + (y+th)e^{-(y''+th'')^2}\right) \mathrm{d}x\,.$$

Prohodím integrál a derivaci (předpokládám, že L je dostatečně spojitá a hladká) a rovnou všechny členy zderivuji podle t, vyjde

$$\begin{aligned}\delta\Phi[y](h) = \lim_{t\to 0^+} \int_0^1 & x^2\cos(\pi y + \pi th)\pi h + 3(y'+th')^2 h' + (y''+th'')h''' + (y'''+th''')h'' + \\ & + he^{-(y''+th'')^2} - 2(y''+th'')h''(y+th)e^{-\left(y''+th''\right)^2}\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Když mám diferenciál v tomto tvaru, stačí položit $t = 0$, čímž se výraz zkrátí na

$$\delta\Phi[y](h) = \int_0^1 x^2\cos(\pi y)\pi h + 3(y')^2 h' + y''h''' + y'''h'' + (h - 2y''h''y)\,e^{-\left(y''\right)^2}\mathrm{d}x\,,$$

což je již finální tvar Gateauxova diferenciálu.

2

2.1 Zadání

Pro všechny funkce $y = y(x)$ patřící do prostoru $C^1([0,1])$ spočti Fréchetův diferenciál funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 x^2 \left(y^4 - (y')^2\right) \mathrm{d}x \,.$$

2.2 Řešení

Nejprve potřebuji opět vypočítat Gateauxův diferenciál zadaného funkcionálu, neboť pokud Fréchetův diferenciál existuje, pak je mu roven. Postup bude obdobný jako v předchozím případě:

$$\delta\Phi[y](h) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 x^2 \left((y+th)^4 - (y'+th')^2\right) \mathrm{d}x \,,$$

$$\delta\Phi[y](h) = \lim_{t\to 0^+} \int_0^1 x^2 \left(4\left(y+th\right)^3 h - 2\left(y'+th'\right) h'\right) \mathrm{d}x \,,$$

$$\delta\Phi[y](h) = \int_0^1 x^2 \left(4y^3 h - 2y'h'\right) \mathrm{d}x \,. \tag{2}$$

Abych zjistil, zda je tento výraz i Fréchetovým diferenciálem, musím ověřit, zda splňuje podmínku

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{\Phi(y+h) - \Phi(y) - \delta\Phi[y](h)}{||h||} = 0 \,. \tag{3}$$

To podmínky tedy dosadím konkrétní výrazy, dostanu

$$0 = \lim_{||h||\to 0} \frac{\int_0^1 x^2 \left((y+h)^4 - (y'+h')^2\right) \mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 \left(y^4 - (y')^2\right) \mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 \left(4y^3 h - 2y'h'\right) \mathrm{d}x}{||h||} \,.$$

Součet integrálů je samozřejmě integrál součtu, celý čitatel tak můžu „schovat“ pod jeden integrál. Zároveň s tím roznásobím závorky - některé členy se pak odečtou a celý výraz se zjednoduší:

$$0 = \lim_{||h||\to 0} \frac{\int_0^1 x^2 \left(y^4 + 4yh^3 + 6y^2h^2 + 4yh^3 + h^4 - (y')^2 - 2y'h' - (h')^2 - y^4 + (y')^2 - 4y^3 h + 2y'h'\right) \mathrm{d}x}{||h||} \,,$$

$$0 = \lim_{||h||\to 0} \frac{\int_0^1 x^2 \left(6y^2h^2 + 4yh^3 + h^4 - (h')^2\right) \mathrm{d}x}{||h||}$$

Integrál v čitateli mohu rozdělit na součet čtyř integrálů a ty začít shora odhadovat. Absolutní hodnotu podmínky Fréchetova diferenciálu označím F a začnu odhadem $\int_a^b f(x) \leq \max\limits_{x\in[a,b]} (f(x))(b-a)$:

$$F \equiv \left| \lim_{||h||\to 0} \frac{\Phi(y+h) - \Phi(y) - \delta\Phi[y](h)}{||h||} \right| = \left| \lim_{||h||\to 0} \left(\frac{\int_0^1 6x^2y^2h^2 \mathrm{d}x}{||h||} + \frac{\int_0^1 4x^2h^3 \mathrm{d}x}{||h||} + \frac{\int_0^1 x^2h^4 \mathrm{d}x}{||h||} - \frac{\int_0^1 x^2(h')^2 \mathrm{d}x}{||h||} \right) \right| \leq$$

$$\leq \lim_{||h||\to 0} \left| \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} (6x^2y^2h^2)}{||h||} + \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} (4x^2h^3)}{||h||} + \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} (x^2h^4)}{||h||} - \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} (x^2(h')^2)}{||h||} \right| ,$$

pokračovat budu pomocí odhadu $\max\limits_{x\in[0,1]} (f(x)g(x)) \leq \max\limits_{x\in[0,1]} (f(x)) \max\limits_{x\in[0,1]} (g(x))$ a trojúhelníkové nerovnosti $|a+b+c-d| \leq |a| + |b| + |c| + |d|$:

$$F \leq \lim_{||h||\to 0} \left(\left| \max_{x\in[0,1]} (6x^2y^2) \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} \left(h^2\right)}{||h||} \right| + \left| \max_{x\in[0,1]} (4x^2) \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} \left(h^3\right)}{||h||} \right| + \left| \max_{x\in[0,1]} (x^2) \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} \left(h^4\right)}{||h||} \right| + \left| \max_{x\in[0,1]} (x^2) \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} \left((h')^2\right)}{||h||} \right| \right) .$$

Členy před jednotlivými zlomky jsou vlastně pouze konstanty, označím je proto (pro větší přehlednost a menší prostorovou náročnost) $k_1, \ldots, k_4$. Dále obecně platí $\left| \max\limits_{x\in[a,b]} (f(x)) \right| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)|)$ a zároveň $\forall n \in \mathbb{N} : |x^n| = |x|^n$. Po aplikaci těchto odhadů dostanu

$$F \leq \lim_{||h||\to 0} \left(k_1 \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} \left(|h|^2\right)}{||h||} + k_2 \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} \left(|h|^3\right)}{||h||} + k_3 \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} \left(|h|^4\right)}{||h||} + k_4 \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} \left(|h'|^2\right)}{||h||} \right) .$$

V posledním odhadu využiju rovnice $\max\limits_{x\in[a,b]}(y(x)^n) = \max\limits_{x\in[a,b]}(y(x))^n$ a toho, že jistě platí $|h| \leq |h| + |h'|$, resp. $|h'| \leq |h| + |h'|$:

$$F \leq \lim_{||h||\to 0}\left(k_1\frac{\max\limits_{x\in[0,1]}(|h|+|h'|)^2}{||h||} + k_2\frac{\max\limits_{x\in[0,1]}(|h|+|h'|)^3}{||h||} + k_3\frac{\max\limits_{x\in[0,1]}(|h|+|h'|)^4}{||h||} + k_4\frac{\max\limits_{x\in[0,1]}(|h|+|h'|)^2}{||h||}\right) .$$

Výrazy v čitatelích však již jsou přímo definicemi normy funkce, proto můžu ekvivalentně napsat

$$F \leq \lim_{||h||\to 0}\left(k_1\frac{||h||^2}{||h||} + k_2\frac{||h||^3}{||h||} + k_3\frac{||h||^4}{||h||} + k_4\frac{||h||^2}{||h||}\right) .$$

Nyní už se jedná o triviální vyřešení limity, po vykrácení zlomků zbude vždy alespoň $||h||^1$, výsledkem je tedy

$$F \leq 0 .$$

F však bylo definováno jako absolutní hodnota z podmínky Fréchetova diferenciálu, musí tak být nezáporné, a může tak nabývat pouze hodnoty 0. Tím je splněna podmínka (3), a výraz (2) tak opravdu je Fréchetovým diferenciálem.

3

3.1 Zadání

Nechť $a,b \in \mathbb{R}$. Najdi extremálu $y_0 \in \{y \in C^1([0,1]); y(0) = a,\, y(1) = b\}$ funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(2e^x y + y^2 + (y')^2\right) \mathrm{d}x\,. \tag{4}$$

3.2 Řešení

Nejprve vypočítám, jaká funkce $y(x)$ splňuje E-L rovnici

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}\right)' + \frac{\partial L}{\partial y} = 0\,.$$

Pokud totiž extremála existuje, pak je řešením E-L rovnice. Do rovnice dosadím $L(x,y,y')$ ze zadání

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'} 2e^x y + y^2 + (y')^2\right)' + \frac{\partial}{\partial y} 2e^x y + y^2 + (y')^2 = -2y'' + 2e^x + 2y = 0\,.$$

Jedná se o obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Upravím ji do tvaru

$$y'' - y = e^x\,,$$

a následně budu hledat řešení ve tvaru $y = y_{\mathrm{hom}} + y_{\mathrm{part}}$. Homogenní řešení budu hledat ve tvaru $y_{\mathrm{hom}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Koeficienty λ_1,λ_2 zjistím vyřešením charakteristické rovnice

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0\,, \\ \lambda_{1,2} = \pm 1\,, \end{aligned}$$

odkud již jasně mám

$$y_{\mathrm{hom}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}\,.$$

Pravá strana je ve speciálním tvaru, partikulární řešení tak budu hledat ve tvaru $y_{\mathrm{part}} = Kxe^x$. V takto jednoduchém případě lze uhádnout (nebo vypočítat y''_{part} a pak vypočítat K tak, aby rovnice platila), že $K = 1/2$. Kompletní řešení je tedy

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x\,.$$

Konstanty C_1, C_2 zjistím z okrajových podmínek $y(0) = a$ a $y(1) = b$:

$$\begin{aligned} C_1 e^0 + C_2 e^0 - 0e^0 = a\,, \\ C_1 e^1 + C_2 e^{-1} + \frac{1}{2} e^1 = b\,, \end{aligned}$$

z první rovnice vyjádřím $C_2 = a - C_1$ a dosadím do druhé rovnice, kterou dále vynásobím e^1 a vyjádřím C_1 v závislosti na a, b:

$$\begin{aligned} C_1 e^2 + a - C_1 + \frac{1}{2} e^2 = be \quad &\Rightarrow \quad C_1 = \frac{be - a - \frac{1}{2}e^2}{e^2 - 1}\,, \\ &\Rightarrow \quad C_2 = \frac{e^2(a + 1/2) - be}{e^2 - 1}\,. \end{aligned}$$

Extremálou zadaného funkcionálu je tedy y_0 ve tvaru

$$y_0(x) = \frac{be - a - \frac{1}{2}e^2}{e^2 - 1} e^x + \frac{e^2(a + 1/2) - be}{e^2 - 1} e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x\,. \tag{5}$$