$\boxed{\text{Věta 10.8}}$ (Leibnizova) Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} : M \to \mathbb{R}$ a platí $\boxed{0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x) \quad \forall x \in M \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Pak jsou ekvivalentní:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) \text{ konverguje stejnoměrně} \iff f_n \rightrightarrows 0 \text{ v } M.$$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ plyne z Věty 10.6

$\boxed{\Leftarrow}$ Protože $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně v M, tak konverguje (samozřejmě) bodově v M, tzn.

$\forall x \in M \qquad f_n(x) \to 0$ (a $\{f_n(x)\}$ je nerostoucí). Jsou tedy splněny předpoklady Leibnizovy věty pro číselné řady (viz Věta 6.10) a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$ konverguje bodově pro každé $x \in M$.

Označme

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) \qquad x \in M.$$

Stejnoměrná konvergence řady bude dokázána, pokud ověříme, že

$$(\bullet) \qquad \sup_{x \in M} |S(x) - S_N(x)| = \sup_{x \in M} \Big|\underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)}_{V(x)}\Big| \longrightarrow 0 \text{ pro } N \to \infty.$$

Avšak, je-li $N+1$ liché pak

$$V(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x) = f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x) + f_{N+3}(x) - f_{N+4}(x) + f_{N+5}(x) - f_{N+6}(x) \dots$$

a z monotonie $\{f_n\}$ vidíme, že ($f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x) \ge 0 \wedge -f_{N+2}(x) + f_{N+3}(x) \le 0$)

$$(\bullet\bullet) \qquad \boxed{0 \le V(x) \le f_{N+1}(x).}$$

Je-li $N+1$ sudé, pak

$$V(x) = \underbrace{-f_{N+1}(x) + f_{N+2}(x)}_{\le 0} \overbrace{- f_{N+3}(x)}^{\ge 0} + \dots$$

$$V(x) = \underbrace{-f_{N+1}(x) + \overbrace{f_{N+2}(x) - f_{N+3}(x)}^{\ge 0}}_{\le 0} \underbrace{}_{} \dots$$

a tedy

$$(\bullet\bullet\bullet) \qquad \boxed{-f_{N+1}(x) \le V(x) \le 0}$$

Porovnáním $(\bullet\bullet)$ a $(\bullet\bullet\bullet)$ a dosazením do $(\bullet)$ máme:

$$\sup_{x \in M} \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)\Big| = \sup_{x \in M} |f_{N+1}(x)| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0,$$

přičemž poslední limita plyne z Věty 10.1. a ze skutečnosti, že $\{f_n\}$ konverguje k nule stejnoměrně.

Ještě než zformulujeme "stejnoměrnou" variantu Abel-Dirichletových kritérií, zavedeme nový pojem STEJNÉ omezenosti.

Def Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}: M \to \mathbb{C}$. Řekneme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je <u>stejně omezená v M</u>

$\overset{df}{\equiv} (\exists K>0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in M)\ |f_n(x)| \le K$

Příklad • Posloupnost $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ je stejně omezená v $\mathbb{R}$. $\boxed{K \ge 1}$

• Posloupnost $\{n^2 x(1-x)^n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>není</u> stejně omezená v $\langle 0,1\rangle$, ani v $(0,1)$.

• Ukažte: $f_n \rightrightarrows f$ v $M \Rightarrow \{f_n\}$ stejně omezená v M.

Věta 10.9 (Dirichletův a Abelův test). Mějme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Platí

(P1) $\{g_n\}$ splňuje: $\quad g_{n+1}(x) \begin{smallmatrix}\le\\ \ge\end{smallmatrix} g_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in M$ <u>monotónie</u>

Pokud **BUĎ**

(DIR) $\begin{cases} \cdot\ \{F_N\}_{N=1}^{\infty}, \text{ kde } F_N(x) := \sum_{k=1}^{N} f_k(x), \text{ je } \underline{\text{stejně omezená v } M} \\ \cdot\ g_n \rightrightarrows 0 \text{ v } M \end{cases}$

NEBO

(ABEL) $\begin{cases} \cdot\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \underline{\text{konverguje stejnoměrně v } M} \\ \cdot\ \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ je } \underline{\text{stejně omezená v } M} \end{cases}$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ <u>konverguje stejnoměrně v M</u>.

Důkaz • Ověříme platnost B-C podmínky pro stejnoměrnou konvergenci řad.

• Využijeme diskrétní verzi integrace per-partes (kterou si odvodíme):

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x) g_n(x) = f_{N+1}(x) g_{N+1}(x) + \dots + f_{N+p}(x) g_{N+p}(x)$$
$$= g_{N+1}(x)\big(F_{N+1}(x) - F_N(x)\big) + g_{N+2}(x)\big(F_{N+2}(x) - F_{N+1}(x)\big) + \dots + g_{N+p}(x)\big(F_{N+p}(x) - F_{N+p-1}(x)\big)$$
$$= -g_{N+1}(x) F_N(x) + \big(g_{N+1}(x) - g_{N+2}(x)\big) F_{N+1}(x) + \big(g_{N+2}(x) - g_{N+3}(x)\big) F_{N+2}(x)$$
$$+ \big(g_{N+p-1}(x) - g_{N+p}(x)\big) F_{N+p-1}(x) - g_{N+p}(x) F_{N+p}(x)$$

Odtud:

$$(\blacksquare)\quad \left|\sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x) g_n(x)\right| \le |g_{N+1}(x)|\,|F_N(x)| + \max_{\ell=1,\dots,p-1} |F_{N+\ell}(x)| \sum_{\ell=N+1}^{N+p-1} |g_{\ell+1}(x) - g_\ell(x)|$$
$$+ |g_{N+p}(x)|\,|F_{N+p}(x)|$$

Z monotónie $\{g_n\}$, viz (P1), plyne, že

$\sum_{l=N+1}^{N+p-1} |g_{l+1}(x)-g_l(x)|$ je teleskopická a tedy

$$\sum_{l=N+1}^{N+p-1} |g_{l+1}(x)-g_l(x)| = \pm\left[g_{N+p}(x)-g_{N+1}(x)\right]$$

Tedy z odhadu (■) výše plyne:

$$\underbrace{V_{BC}(x) := \left|\sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x)\, g_n(x)\right| \le 4 \max_{l\in\{N+1,\dots,N+p\}} |g_l(x)| \max_{l\in\{N+1,\dots,N+p\}} |F_l(x)|}$$

Platí-li (DIR), pak • $\exists K>0\ \forall l\ \forall x\in M\ \ |F_l(x)|\le K$

• $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ge n_0\ \forall x\in M\ \ |g_n(x)|<\varepsilon$

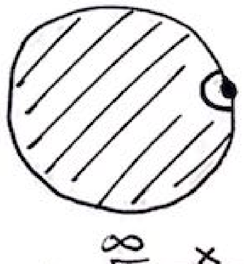
tedy $\sup_{x\in M} V_{BC}(x) \le 4K\varepsilon$. ✓

Platí-li (Abel), pak • $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall N\ge n_0\ \forall \tilde p\in\mathbb{N}\ \forall x\in M\ \ |F_{N+\tilde p}(x)|<\varepsilon$

• $\exists L>0\ \forall l\ \forall x\in M\ \ |g_l(x)|<L$

tedy $\sup_{x\in M} V_{BC}(x) \le 4L\varepsilon$.

Příklad (i) Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ konverguje stejnoměrně na $\overline{B_1(0)}\setminus B_\delta(1)$ neboli lokálně stejnoměrně na $\overline{B_1(0)}\setminus\{1\}$.



Příklad (ii) Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$.

Řešení Bodová konvergence $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ je lichá, stačí tedy uvažovat ji na $\langle 0,\infty)$, kde $f_n(x)\ge 0$. Pro $x=0$: $f_n(0)=0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)=0$.

Pro $x\neq 0$: $0<\frac{x}{1+n^2x^2} \le \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{x\,n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{c}{x}$.

Řada konverguje bodově v $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0}$$

Stejnoměrná konvergence • $f_n(x)$ na $(0,+\infty)$ je rostoucí na $\langle 0,\frac{1}{n}\rangle$ a klesající na $\langle \frac{1}{n},+\infty)$ a $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}$. Ale číselná řada, která majorizuje $f_n(x)$, tj. řada $\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n}$ nekonverguje.

Tedy Weierstrassovo kritérium nám nedalo odpověď, zda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ či nikoliv. Vidíme však, že body, kde fce f_n nabývají maxima, tj. body $\frac{1}{n}$, konvergují k 0.

- Zkusme tedy dle Weierstrassova kritéria prozkoumat stejnoměrnou konvergenci na $\langle \delta, +\infty)$, $\delta > 0$ pevné (byť malé). Pro $\delta > 0$ $\exists\, n_0$ tak, že $\frac{1}{n_0} < \delta$. Pak na $\langle \delta, +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x)}_{=:\, g(x)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)$$

$$\leq g(x) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\delta}{1+n^2\delta^2} \leq g(x) + \frac{1}{\delta}\underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{\text{řada konverguje}} = g(x) + \frac{\text{konst}}{\delta}$$

řada konverguje

Weierstrass

$$\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) \text{ konverguje stejnoměrně na } (-\infty, -\delta\rangle \cup \langle \delta, +\infty) \quad \forall \delta > 0.}$$

- Stále nevíme, zda $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Stačí $\langle 0, +\infty)$. Asi ne, zkusíme tedy ověřit platnost NEGACE B-C podmínky stejnoměrné konvergence řad. Chceme ukázat:

$$\boxed{\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \geq n\ \exists p \in \mathbb{N}\ \exists x_m \in \langle 0, +\infty) \text{ tak, že } \left|\sum_{n=m_0+1}^{m_0+p} f_n(x_m)\right| > \varepsilon_0}$$

Hledáme ε_0. Počítejme s $p = n_0$

$$\sum_{n=n_0+1}^{2n_0} f_n(x) = \sum_{n=n_0+1}^{2n_0} \frac{x}{1+n^2x^2} \geq \frac{n_0 x}{1+(2n_0)^2x^2} = g(x) \geq g(x_{MIN})$$

$$\boxed{\forall n:\ 1+n^2x^2 \leq 1+(2n_0)^2x^2}$$

$$g'(x) = \frac{n_0(1+(2n_0)^2x^2) - (2n_0)^2 2n_0 x^2}{(1+(2n_0)^2x^2)^2} = \frac{n_0(1-(2n_0)^2x^2)}{\dots}$$

$$x_{MIN} = \frac{1}{2n_0} \Rightarrow g(x_{MIN}) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Tedy $\boxed{\varepsilon_0 = \frac{1}{8}}$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$ vezmeme $n_0 = n$ a $p = 2n_0$ a $x_m = \frac{1}{2n_0}$ a dostaneme negaci B-C podmínky.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně.

$\square$

Různé typy konvergencí pro posloupnosti funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} : I \xrightarrow{\subset\mathbb{R}} \mathbb{R}$

- $\boxed{f_n \to f \text{ v } I}$ bodová konvergence
- $\boxed{f_n \to f \text{ skoro všude v } I}$ bodová konvergence až na množinu malé míry (bude zadefinováno v další kapitole)
- $\boxed{f_n \rightrightarrows f \text{ v } I}$ stejnoměrná konvergence
- $\|f_n - f\|_X \to 0$ kde $(X, \|\cdot\|_X)$ je normovaný prostor funkcí

konvergence v normě

Speciálně:

▶ $(X, \|\cdot\|_X) = \left(C(I), \|f\|_\infty := \sup_{x\in I} |f(x)|\right)$

$$f_n \to f \text{ v } C(I) \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0 \text{ pro } n\to\infty$$

$$\iff \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ pro } n \to \infty$$

$$\underset{\text{Věta 10.1}}{\iff} f_n \rightrightarrows f \text{ v } I$$

ZÁVĚR: Na prostoru $C(I)$ opatřeného supremovou normou je konvergence v normě ekvivalentní stejnoměrné konvergenci

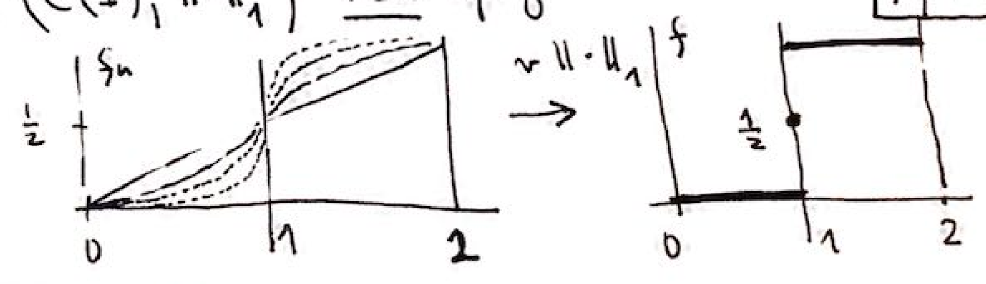
Navíc, dle Věty 10.3 je $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ úplný

▶ $(X, \|\cdot\|_X) = \left(C(I), \|f\|_1 := \int_I |f(x)|\,dx\right)$.

Nyní: $f_n \to f$ v $C(I) \iff \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pro $n\to\infty$

$$\iff \int_I |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0 \text{ pro } n\to\infty$$

Problém: a) $(C(I), \|\cdot\|_1)$ není úplný $\boxed{f \notin C(I)}$



b) integrální normy jsou užitečné (viz úlohy variačního počtu)

Otázka: Lze zavést prostory funkcí, které budou úplné vzhledem k integrální normě $\|\cdot\|_1$, či obecněji $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < +\infty$?

$$\text{zde} \quad \|f\|_p := \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Odpověď: Ano. Lebesgueovy prostory $L^p(I)$, kde ale $\int_I |f(x)|^p$ je Lebesgueův integrál.

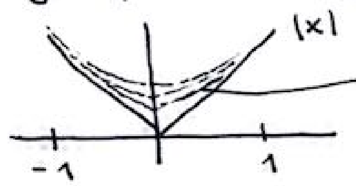
▶ $(X, \|\cdot\|_X) = (C^1(I), \|f\|_\infty)$ <u>není</u> úplný

(i) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} \rightrightarrows 0$ tzn. $\left\| \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} - 0 \right\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ale
$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$ nekonvergují ani bodově

Tedy f_n nekonvergují k C^1-fci

(ii)



$f_n \in C^1(-1,1)$; $\|f_n - |x|\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Updownarrow$

$f_n \rightrightarrows |\mathrm{Id}|$ v $(-1,1)$

ale $f(x) = |x| \notin C^1((-1,1))$.

▶ $(X, \|\cdot\|_X) = \left(C^1(I); \|f\|_{C^1(I)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \right)$ je <u>úplný</u>

KOMPAKTNÍ MNOŽINY V $C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní

Víme a) $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní $\Longleftrightarrow$ K je omezená a uzavřená

Heine-Borelova věta

b) $(X, \|\cdot\|)$ Banachův

$\overline{B_1(0)}^{\|\cdot\|_X}$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ $\dim X < +\infty$

Speciálně: Jednotková koule v l_2 není kompaktní:

nelze z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$, kde

$x_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$

↑ n-té místo

vybrat konvergentní, neboť $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \neq n_2$

$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\|_{l_2} = \sqrt{2}$$

c) $\boxed{C(K)}$ ... prostor spojitých funkcí na K

obsahuje $C^{\infty}(K)$ ... prostor funkcí, které mají spojité derivace libovolného řádu

obsahuje polynomy všech řádu

$1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ (když $K \subset \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim C(K) = +\infty}$

Otázka: Jaké jsou kompaktní množiny v $C(K)$?

Odpověď: Arzéla-Ascoliho věta.

$\boxed{\text{Věta 10.10}}$ Arzela-Ascoli aneb kritérium kompaktnosti v $C(K)$

Buď $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní. Pak platí:

$\boxed{A \subset C(K)^m = \underbrace{C(K) \times \dots \times C(K)}_{m\text{-krát}} \text{ je kompaktní}} \iff$

- $\exists K > 0 \ \sup_{f \in A} \sup_{x \in K} |f(x)|_{\mathbb{R}^m} \le L$ — stejná omezenost [omezenost A]
- $\sup_{f \in A} |f(x+h) - f(x)|_{\mathbb{R}^m} \to 0$ pro $|h|_{\mathbb{R}^d} \to 0$

$\boxed{\text{Formulace pro posloupnosti}}$ Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([a,b])$ splňuje

(P1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou stejně omezené $\exists K > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [a,b] \ |f_n(x)| \le K$

(P2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou stejně stejnoměrně spojité tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x', x'' \in [a,b]$$
$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Pak $\exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}$, která konverguje v $C([a,b])$.

Dk: Uvaž racionální čísla v $\langle a,b \rangle$. Víme, že tvoří spočetnou množinu. Seřadíme je do posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Nyní konstrukce:

- $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, existuje $\{f_{1,n}(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ která konverguje
- $\{f_{1,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ — ‖ — , — ‖ — $\{f_{2,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ — ‖ —

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Uvažme posloupnost $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ (Cantorova diagonalizace)

Pak $\boxed{\lim_{n\to\infty} f_{n,n}(x_k) \text{ existuje pro } \forall k \in \mathbb{N}}$

Zbývá ukázat, že $f_{n,n}$ je cauchyovská v supremové normě, tzn. splňuje B-C podmínku stejnoměrné konvergence.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu najdeme $\delta > 0$ z podmínky (P2). Pak najdeme l racionálních čísel y_i, $i = 1, \dots, l$, tak, že

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{l} (y_i - \delta, y_i + \delta).$$

Nyní pro každé $t \in [a,b]$ existuje $y_j : |t - y_j| < \delta$.
Máme

$$|f_{n,m}(t) - f_{m,m}(t)| \leq |f_{n,n}(t) - f_{n,n}(y_j)| + \underbrace{|f_{n,n}(y_j) - f_{m,m}(y_j)|}$$
$$+ |f_{m,m}(y_j) - f_{m,m}(t)|$$

$\leq 2\varepsilon$ ze stejné stejnoměrné spojitosti viz (P2).

lze udělat menší než ε $\forall m,n \geq N = \max_{\ell} \{N_1, \dots, N_\ell\}$ (jen konečně y_j)

Kapitolu zakončíme Diniho větou (postačující podmínka stejnoměrné konvergence).

<u>Věta 10.11.</u> (Dini)

- $f_n, f \in C(\langle a,b \rangle)$
- $f_n \to f$ v $\langle a,b \rangle$
- STEJNÁ MONOTONIE $f \leq \dots \leq f_{n+1} \leq f_n \leq \dots \leq f_1$ v $\langle a,b \rangle$

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ v $\langle a,b \rangle$.

(Dk) Uvažováním $\varphi_n : f_n - f$ a následným přeznačením $f_n = \varphi_n$, lze uvažovat, bez újmy na obecnosti, situaci $f_n \geq 0$ a $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ $\forall n$

Sporem, kdyby $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $\langle a,b \rangle$ tak nekonečně indexů (n) tak, že existuje $\varepsilon_0 > 0$ a $\sup_{x \in \langle a,b \rangle} f_n(x) \geq \varepsilon_0$

Opět uvažujme jen tato n a f_n.

Protože $f_n \in C(\langle a,b \rangle)$, $\exists x_n \in \langle a,b \rangle$ $f_n(x_n) \geq \varepsilon_0$.

Ale $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená $\Longrightarrow \exists \{x_{n_k}\}$ a $x_0 \in \langle a,b \rangle : x_{n_k} \to x_0$

Opět přeznačme a uvažujme $f_n(x_n) \geq \varepsilon_0$ a $x_n \to x_0$.

Pak

$$0 < \varepsilon_0 \leq f_\ell(x_\ell) \overset{m<\ell}{\leq} f_m(x_\ell) = f_m(x_\ell) - f_m(x_0) + f_m(x_0)$$
$$\leq \underbrace{|f_m(x_\ell) - f_m(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{3}} + \underbrace{|f_m(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{3}}$$

m zafixuji tak, aby: $< \frac{\varepsilon_0}{3}$ z bodové konvergence

$< \frac{\varepsilon_0}{3}$ ze spojitosti již zafixované f_m a $x_\ell \to x_0$

Tedy $\varepsilon_0 \leq \frac{2\varepsilon_0}{3} \Leftrightarrow 3 \leq 2$ ↯