Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Body	7	9	8	24
Získáno				

[7] 1. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ otevřená.

(a) Zadefinujte symboly a pojmy

- $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$;
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je diferencovatelná v Ω;
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω;

(b) Rozhodněte a odůvodněte, zda platí implikace *má-li $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ v z derivaci, pak je F, vnímána jako funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, diferencovatelná v z.*
(c) Odůvodněte, proč funkce F daná vztahem $F(z) = \overline{z}$ nesplňuje opačnou implikaci. Jakou podmínku je třeba přidat k diferencovatelnosti $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ v z tak, abychom dostali charakterizaci existence $F'(z)$, kde F je chápána jako funkce z $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Vysvětlete.
(d) Dokažte:

Nechť je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní v $B_\varrho(0)$, tj. v kruhu se středem v 0 o poloměru ϱ. Nechť navíc Ref je v $B_\varrho(0)$ konstantní. Pak je f nutně konstantní v $B_\varrho(0)$.

[9] 2. (a) Zadefinujte prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $L^1(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
(b) Zadefinujte konvergenci $f_n \to f$ v X, kde $f_n, f \in X$ a X representuje všechny výše uvedené prostory.
(c) Pokud ztotožníte funkce z $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $L^1(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{R}^d)$ s regulárními distribucemi, jaké inkluze mezi výše uvedenými čtyřmi prostory platí. Dokažte.
(d) Zaveďte pečlivě Fourierovu transformaci na všech těchto prostorech.
(e) Zformulujte *inverzní Fourierův vzorec* a uveďte, na kterém z výše uvedených prostoru platí. Pokud platí inverzní Fourierův vzorec na prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, tak jej dokažte.
(f) Zformulujte Parsevalovu (Plancherelovu) rovnost a uveďte, na kterém prostoru platí.

[8] 3. Nechť komplexní funkce komplexní proměnné f má tyto tři vlastnosti:

1. f je holomorfní v $\mathbb{C}$,
2. existuje $M > 0$ tak, že $|f(z)| \leq M$ pro každé $z \in \mathbb{C}$,
3. $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$.

(a) Uveďte o jakou funkci se jedná a vysvětlete proč. Potřebné tvrzení dokažte (Cauchy-Goursatovu větu není potřeba dokazovat).

(b) Které z výše uvedených tří vlastností funkce $\sin(2\pi z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nesplňuje. Vysvětlete proč?

(c) Dokažte platnost vztahu $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ v $\mathbb{C}$.

(d) Pro f je holomorfní v $\mathbb{C}$, zaveďte primitivní funkci F a ukažte, že toto zavedení je smysluplné a že F je skutečně primitivní k f v $\mathbb{C}$.