Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	6	7	8	7	8	36
Získáno						

[6] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right) \,|\, y(0) = 0,\ y(1) = \ln 2 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 (1+x)\left(y'\right)^2 \,\mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnici pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gâteaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\right|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y+th) = \int_0^1 (1+x)\left((y+th)'\right)^2 \mathrm{d}x,$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th) = 2\int_0^1 (1+x)\,(y+th)'\,h'\mathrm{d}x$$

po dosazení $t=0$ dostaneme

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\right|_{t=0} = 2\int_0^1 (1+x)y'h'\mathrm{d}x,$$

a proto

$$D\Phi(y)[h] = 2\int_0^1 (1+x)y'h'\mathrm{d}x.$$

Po integraci *per partes* dostaneme

$$-2\int_0^1 \left((1+x)y'\right)' h\,\mathrm{d}x,$$

přičemž využíváme toho, že $h \in \left\{ g \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right) \,|\, g(0) = 0,\ g(1) = 0 \right\}$. Eulerova–Lagrangeova rovnice tedy je

$$\left((1+x)y'\right)' = 0,$$

řešením výše uvedené diferenciální rovnice je zřejmě funkce

$$y = C_1 \ln(1+x) + C_2,$$

integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, má být

$$C_2 = 0,$$
$$C_1 \ln 2 = \ln 2,$$

odkud $C_2 = 0$, $C_1 = 1$ a tedy
$$y_{\text{ext}} = \ln(1+x).$$

Druhou derivaci funkcionálu Φ spočteme podle předpisu

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\bigg|_{t=0} = 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^1 (1+x)(y+th)'h'\mathrm{d}x\right)\bigg|_{t=0} = 2\int_0^1 (1+x)\left(h'\right)^2\,\mathrm{d}x,$$

což je kupodivu totéž jako dle věty

Buď Φ funkcionál zadaný předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x.$$

Pak je jeho druhý diferenciál roven

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \int_a^b \left[P\left(h'\right)^2 + Qh^2\right]\mathrm{d}x,$$

kde

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}, \\ Q &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right), \end{aligned}$$

Máme tedy
$$D^2\Phi(y)[h,h] = 2\int_0^1 (1+x)\left(h'\right)^2\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

a okamžitě vidíme, že druhá derivace je nezáporná v jakémkoliv bodě y a navíc nezávisí na y. (To není překvapení, funkcionál Φ je “kvadratický” v proměnné y.) Druhá derivace vyčíslená v bodě y_{ext} je

$$D^2\Phi(y_{\text{ext}})[h,h] = 2\int_0^1 (1+x)\left(h'\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

[7] 2. Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan{(nx)}}{nx^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalech

a) $I = (0, 1)$,
b) $J = [1, +\infty)$,
c) $K = [\alpha, +\infty)$, $\alpha > 1$.

Dále rozhodněte, zda je tato řada na uvedených intervalech absolutně stejnoměrně konvergentní.

Řešení:

Nejprve si povšimneme, že pro $x \in (0, +\infty)$ je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{nx^n}$ řadou s kladnými členy, nebude tedy rozdíl mezi konvergencí a absolutní konvergencí, v tomo případě obojí splývá.

Zabývejme se nejprve intervalem I. Vidíme, že platí

$$\frac{\arctan{(nx)}}{nx^n} = \frac{\arctan{(nx)}}{nx} \frac{1}{x^{n-1}},$$

a na základě tohoto rozpisu vytvoříme hypotézu, že první člen $\frac{\arctan(nx)}{nx}$ je neškodný, a že veškeré chování řady je určeno členem $\frac{1}{x^{n-1}}$. (Platí dokonce, že pro libovolné pevné x je $\frac{\arctan(nx)}{nx} \searrow 0$ pro $n \to \infty$. V naší analýze to ovšem nebudeme potřebovat.) Tuto hypotézu nyní budeme rozpracovávat. Volme si $x = \frac{1}{2}$, což je nepochybně číslo z intervalu I, pak jest pro $n \geq 4$

$$\left. \frac{\arctan{(nx)}}{nx^n} \right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\arctan{\left(\frac{n}{2}\right)}}{n} 2^n \geq \frac{2^n}{n}.$$

Číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n}$ je ovšem divergentní, řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{nx^n}$ tedy pro volbu $x = \frac{1}{2}$ nekonverguje a tudíž na intervalu I nekonverguje stejnoměrně.

Při analýze chování na intervalu J a K využijeme Weierstrass kritérium, které říká:

> Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnosti funkcí, přičemž $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost nezáporných funkcí. Nechť platí:
>
> - Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M.
> - Pro každé $x \in M$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq g_n(x)$.
>
> Potom řada $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M.

Na intervalu J a tedy i intervalu K zjevně platí, že

$$\frac{\arctan{(nx)}}{nx^n} = \frac{\arctan{(nx)}}{nx} \frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{1}{x^{n-1}},$$

kde jsme využili nerovnosti $\arctan y \leq y$. Zkoumejme nyní řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Tato řada je geometrická řada, kdykoliv je $x \in (1, +\infty)$, tak platí

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{x^{n-1}} = \sum_{n=0}^{M+1} \frac{1}{x^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{M+1}}{1 - \frac{1}{x}} \overset{M \to +\infty}{\to} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Navíc, je-li $x \in K$, pak je řada $\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{x^{n-1}}$ stejnoměrně konvergentní. Z Weierstrassova kritéria proto plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan{(nx)}}{nx^n}$$

je na intervalu K stejnoměrně konvergentní.

Prozkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu J. Nejprve zjistíme, jestli řada splňuje nutnou podmínku na stejnoměrnou konvergenci, která říká:

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, pak $f_n \overset{M}{\rightrightarrows} 0$.

Zkoumejme tedy stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{nx^n}$$

na intervalu J. Bodová limita je na zkoumaném intervalu nula, navíc je posloupnost na tomto intervalu posloupností nezáporných funkcí. Ekvivalentní kritérium pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí zní

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost reálných funkcí jedné reálné proměnné. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb

$$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$

právě když pro $n \to +\infty$ platí

$$\sigma_n \to 0,$$

kde

$$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|\,.$$

Konkrétně tedy chceme spočíst

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,\infty)} \frac{\arctan(nx)}{nx^n}.$$

Použijeme odhad

$$\frac{\arctan(nx)}{nx^n} = \frac{\arctan(nx)}{nx}\frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{\arctan(nx)}{nx} \leq \frac{\pi}{2n},$$

z čehož je vidět, že platí

$$\sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tudíž konverguje stejnoměrně na intervalu $J = [1, +\infty)$. Je proto splněna nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

na intervalu J.

Prozkoumejme platnost Bolzano–Cauchy podmínky, která říká:

Řada $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně na M právě když

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in M : n \geq n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Pro $x \in (1, +\infty)$ platí

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\arctan(kx)}{kx^k} \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\arctan((n+1)x)}{(n+p)x^{n+p}} = p\frac{\arctan((n+1)x)}{(n+p)x^{n+p}}.$$

Volme nyní $p = n$ a $x = 1 + \frac{1}{2n}$, pak

$$p\frac{\arctan((n+1)x)}{(n+p)x^{n+p}}\bigg|_{p=n,\ x=1+\frac{1}{2n}} = \frac{\arctan\left((n+1)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)}{2\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \geq \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \overset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\mathrm{e}},$$

z čehož plyne, že lze zvolit ε tak, že pro libovolné n_0 jsme schopní najít n, p a x tak, aby

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| \geq \varepsilon.$$

Bolzano–Cauchy podmínka tedy není splněna a řada tedy není na intervalu J stejnoměrně konvergentní.

Případně můžeme jednodušeji postupovat i takto. (Povšimněte si, že předchozí postup lze na rozdíl od náledujícího postupu uplatnit i v případě, že zkoumáme pouze interval $(1, +\infty)$ a nikoliv interval $[1, +\infty)$.) Zkoumejme rovnou řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{nx^n}$$

a dosaďme za $x = 1$. Pak je

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{nx^n}\bigg|_{x=1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

což je ovšem divergentní číselná řada. Zkoumaná řada tedy nekonverguje stejnoměrně na intervalu J.

[8] 3. Vyšetřete průběh funkce $F(b)$ dané předpisem

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2 \mathrm{e}^{x^2}} \mathrm{d}x.$$

Diskutujte definiční obor funkce F, spojitost funkce F, limity v krajních bodech definičního oboru, derivaci funkce F, limity derivace v krajních bodech definičního oboru. Najděte inf, sup a (lokální) max, min (pokud existují). Načrtněte graf.

Nápověda: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Řešení:

Funkce $F(b)$ daná přepisem

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2 \mathrm{e}^{x^2}} \mathrm{d}x$$

má dva rizikové body $x = 0$ a $x = +\infty$ (měřitelnost integrandu je zřejmá neboť funkce $f(x, b)$ je pro libovolné b spojitá funkce proměnné x). V okolí nuly je

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2 \mathrm{e}^{x^2}} = \frac{1 - \left(1 + \frac{(-bx^2)}{1!} + \frac{(-bx^2)^2}{2!} + \cdots\right)}{x^2} \mathrm{e}^{-x^2},$$

z čehož okamžitě vidíme, že pro $b \neq 0$ lze funkci pohodlně dodefinovat limitou a integrál bude (na okolí nuly) zcela jistě konečný. Pro $b = 0$ je samozřejmě $F(b) = 0$. (Dokonce platí, že funkce $F(b)$ je v tomto bodě spojitá.)

Zbývá zjistit, jak se integrand chová v druhém rizikovém bodě, a sice v $+\infty$. Pro všechna $b \geq -1 + \varepsilon$, kde ε je libovolné kladné číslo zřejmě platí

$$\left| \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2 \mathrm{e}^{x^2}} \right| \leq \frac{(1 + \mathrm{e}^{(1-\varepsilon)x^2}) \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-\varepsilon x^2}}{x^2}$$

a integrál bude (zajímáme-li se o chování v $+\infty$) zcela jistě konečný. Definiční obor tedy je $[-1, +\infty)$.

K výpočtu funkce $F(b)$ využijeme větu o derivaci integrálu podle parametru, která říká

Buď $f(x, b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $|\frac{\partial}{\partial b} f(x, b)| \leq g(x)$.
- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x, b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x, b) \mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\partial}{\partial b} f(x, b) \mathrm{d}x.$$

V našem případě volme $I = (0, +\infty)$, $J = (-1 + \varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovolné kladné číslo. Diferencovatelnost funkce $f(x, b) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2 \mathrm{e}^{x^2}}$ podle proměnné b je zřejmá, měřitelnost podle proměnné x jsme diskutovali v úvodu, bod $b_0 \in J$, ve kterém má být funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I, nepochybně existuje, protože výše jsme dokonce zjistili, že $f(x, b)$ je lebesgueovsky integrovatelná pro libovolné b z definičního oboru.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu pro derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x, b) = \mathrm{e}^{-(b+1)x^2},$$

což je snadné neboť platí

$$\forall x \in I, \forall b \in (-1 + \varepsilon, +\infty) : \left| \mathrm{e}^{-(b+1)x^2} \right| \leq \mathrm{e}^{-\epsilon x^2}$$

kde funkce na pravé straně je ovšem lebesgueovsky integrovatelná.

Pro funkci $F(b)$ jsme tedy obdrželi

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(b+1)x^2} \mathrm{d}x,$$

z čehož plyne (užíváme známého vztahu $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$), že

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b+1}},$$

odkud integrováním podle proměnné b dostaneme

$$F(b) = \sqrt{\pi(b+1)} + C,$$

kde C je integrační konstanta. Hodnota funkce $F(b)$ v bodě $b = 0$ je zřejmě $F(0) = 0$, odkud $C = -\sqrt{\pi}$, celkem tedy

$$F(b) = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{b+1} - 1\right),$$

odkud

$$F'(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b+1}},$$
$$F''(b) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{(b+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

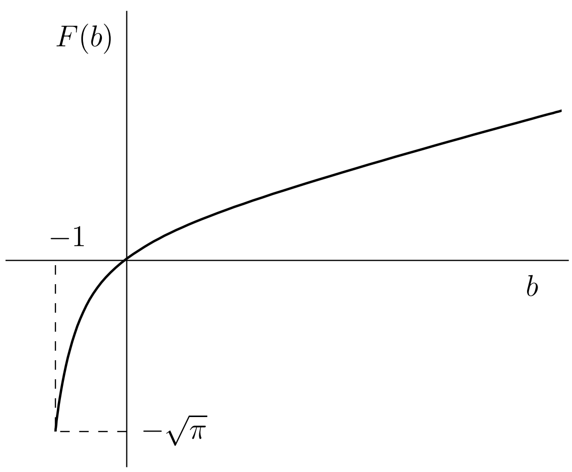
Limity funkce a její derivace v krajních bodech definičního oboru jsou jasné

$$\lim_{b\to-1+} F(b) = -\sqrt{\pi},$$
$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = +\infty,$$
$$\lim_{b\to-1+} F'(b) = +\infty,$$
$$\lim_{b\to+\infty} F'(b) = 0.$$

Funkce je zřejmě na svém definičním oboru rostoucí, nemá maximum, má minimum (v bodě $b = -1$), má supremum a infimum,

$$\inf_{b\in(-1,+\infty)} F(b) = -\sqrt{\pi},$$
$$\sup_{b\in(-1,+\infty)} F(b) = +\infty.$$

Průběh funkce je naznačen na Obrázku 1.



Obrázek 1: Průběh funkce $F(b)$.

[7] 4. Spočtěte objem tělesa $B \subset \mathbb{R}^3$, které je vymezeno plochami $z = \cos\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)$, $z = 1$ a $x^2 + \frac{y^2}{2} = \pi^2$.

Řešení:

Výpočet provedeme v modifikovaných cylindrických souřadnicích, transformační vztah $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{s})$ mezi kartézskými souřadnicemi $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ a modifikovanými cylindrickými souřadnicemi $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} r & \varphi & z \end{bmatrix}$ je

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sqrt{2}\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Determinant Jacobiho matice je proto

$$\det\left[\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{s}}\right] = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial r} & \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial z} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sqrt{2}\sin\varphi & \sqrt{2}r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r\sqrt{2}.$$

Použijeme Fubiniho větu a větu o substituci

$$\begin{aligned} \int_B \mathrm{d}\lambda = \int_B r\sqrt{2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \sqrt{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\int_{r=0}^{\pi}\left(\int_{z=\cos r^2}^{1}\mathrm{d}z\right) r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi = 2\pi\sqrt{2}\int_{r=0}^{\pi}\left(\int_{z=\cos r^2}^{1}\mathrm{d}z\right) r\,\mathrm{d}r \\ = 2\pi\sqrt{2}\int_{r=0}^{\pi}\left(1-\cos r^2\right) r\mathrm{d}r = 2\pi\sqrt{2}\int_{r=0}^{\pi} r\,\mathrm{d}r - 2\pi\sqrt{2}\int_{r=0}^{\pi} r\cos r^2\,\mathrm{d}r = \begin{vmatrix} u = r^2 \\ \mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r \end{vmatrix} \\ = \pi^3\sqrt{2} - \pi\sqrt{2}\left(\int_{u=0}^{\pi^2}\cos u\,\mathrm{d}u\right) = \pi^3\sqrt{2} - \pi\sqrt{2}\left[\sin r\right]_{r=0}^{\pi^2} = \pi\sqrt{2}\left(\pi^2 - \sin\pi^2\right). \end{aligned}$$

[8] 5. Uvažujte funkci $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$.

a) Dodefinujte funkci f na $\mathbb{R}$ tak, abyste ji mohli rozvinout do *kosinové* Fourierovy řady. Načrtněte graf rozšířené funkce f.

b) Najděte Fourierovu řadu takto rozšířené funkce f.

c) Diskutujte konvergenci nalezené Fourierovy řady. Určete zda Fourierova řada konverguje k funkci f ve smyslu konvergence v L^2, ve smyslu bodové konvergence a ve smyslu stejnoměrné konvergence.

d) Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f.

e) Ukažte, že platí $\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{4l^2-1} = \frac{1}{2}$.

f) Ukažte, že platí $\sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi}\frac{1}{4l^2-1}\right)^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2}$.

Řešení:

Funkci rozšíříme tak, aby byla sudá, je tedy

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (0, \pi), \\ -\sin x & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Spočteme Fourierovy koeficienty a_k, b_k, abychom mohli funkci f rozvinout do Fourierovy řady

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Sinové koeficienty jsou nulové, kosinové koeficienty spočteme podle vzorců

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x.$$

Nejprve provedeme výpočet pro a_0,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(-\left[\cos x\right]_{x=-\pi}^{0} + \left[\cos x\right]_{x=0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(2+2) = \frac{4}{\pi}.$$

Následně počítáme pro obecné $k \in \mathbb{N}^+$. Je tedy

$$\begin{aligned}
\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x &= -\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos kx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\sin x\cos kx\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi}\sin x\cos kx\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi}\sin((k+1)x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi}\sin((k-1)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1}\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{(-1)^k}{k-1} - \frac{1}{k-1} = \begin{cases} 0, & k = 2l+1, l \in \mathbb{N}, \\ -\frac{4}{4l^2-1}, & k = 2l, l \in \mathbb{N}, \end{cases}
\end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce $\cos u \sin v = \frac{1}{2}\left(\sin(u+v) - \sin(u-v)\right)$. Celkem tudíž

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{4l^2-1}\cos 2lx.$$

Funkce f je po částech spojitě diferencovatelná a má na jednotlivých intervalech omezenou derivaci, a splňuje proto předpoklady kritéria pro konvergenci Fourierových řad, které říká:

Buď $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a buď funkce f dále po částech spojitá a spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R}$, potom platí

$$\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\xi\to x+} f(\xi) + \lim_{\xi\to x-} f(\xi)\right)$$

Je-li navíc $I \subset (a,b)$ uzavřený interval a $f \in \mathcal{C}([a,b])$, pak

$$s_n \overset{I}{\rightrightarrows} f.$$

Je tedy

$$\forall I \subset \mathbb{R}, I \text{ uzavřený interval}: \; s_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$$

aneb konvergence Fourierovy řady stejnoměrná na libovolném uzavřeném intervalu. (Periodicky rozšířená funkce je spojitá na $\mathbb{R}$.) Platí tedy i

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{4l^2-1} = \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{4l^2-1}\cos 2lx\right]\Bigg|_{x=0} = \lim_{n\to+\infty} s_n(0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\xi\to 0+} f(\xi) + \lim_{\xi\to 0-} f(\xi)\right) = 0,$$

odkud plyne, že

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{4l^2-1}$$

a následně tedy i požadované tvrzení o součtu řad.

Funkce je zřejmě v $L^2((-\pi,\pi))$ a splňuje tedy předpoklady Carlesonovy věty o skoro všude konvergenci, která říká:

Buď $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a buď $f \in L^p((a, a+2\pi))$, $p \in (1,+\infty)$, pak platí

$$s_n \overset{L^p}{\to} f,$$
$$s_n(x) \to f(x) \text{ skoro všude.}$$

Což už ale stejně víme z předchozího.

Parsevalova rovnost říká, že norma funkce f v prostoru $L^2(-\pi,\pi)$ je rovná normě posloupnosti Fourierových koeficientů v prostoru ℓ^2 (předpokládá se rozklad vůči ortonormální bázi)

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|c_k\|_{\ell^2}^2,$$

v našem případě tedy (koeficient $\frac{1}{\pi}$ se zde objevuje proto, že báze $\sin kx$, $\cos kx$ není ortonormální)

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_{L^2}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2,$$

kde

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|^2 dx = \frac{1}{\pi}\pi = 1,$$
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = \frac{8}{\pi^2} + \sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi}\frac{1}{4l^2-1}\right)^2.$$

Obdrželi jsme tedy rovnost

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi}\frac{1}{4l^2-1}\right)^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2},$$

což jsme měli ukázat.