# 13. Měřitelné množiny, míry, Lebesgueovy $L^p$ prostory

[Measurable sets, measures, Lebesgue $L^p$ spaces]

Lebesgueův integrál jsme vybudovali na pojmech „množiny míry nula", „jednoduché funkce", „monotonie", „limitní přechody" a zavedli jsme při konstrukci následující prostory funkcí

- $H$ .... schodovité funkce
- $M^+, L^+$ ... nezáporné měřitelné a lebesgueovsky (lebesgueovsky) integrovatelné funkce
  POZOR! Nejsou vektorové prostory.
- $M, L$ .... měřitelné a lebesgueovsky integrovatelné fce. (lebesgueovsky)

Nyní od funkcí přejdeme k množinám (lebesgueovsky a borelovsky měřitelným) a k zobrazením definovaných na množinách (tj. mírám).

## 13.1 Měřitelné množiny a míry

**Def** Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je <u>lebesgueovsky</u> <u>měřitelná</u> jestliže charakteristická funkce $\chi_\Omega$ je lebesgueovsky <u>měřitelná</u>, tzn.

$$\boxed{\chi_\Omega \in M^+}$$

**Označení** $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je systém všech lebesgueovsky měřitelných množin

Připomeňme, že $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ označuje systém všech podmnožin v $\mathbb{R}^d$. Tedy máme $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Jak je ukázáno v konstrukci na konci této podkapitoly, lze (za předpokladu platnosti Axiomu výběru) sestrojit <u>ne</u>měřitelné množiny. Odsud plyne

$$\Lambda(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),$$

neboli není pravda, že každá podmnožina v $\mathbb{R}^d$ je měřitelná. Chtěli bychom vědět o struktuře $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ více.

Začneme připomenutím pojmů topologie a topologického prostoru.

$\boxed{\text{Def.}}$ Soubor podmnožin $\mathcal{T}$ množiny $X$ (tzn. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$) se nazývá topologie $\overset{\text{df.}}{=}$

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
- $A_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$

neboli topologie obsahuje alespoň $\emptyset$ a $X$ a pak je uzavřená na konečné průniky a libovolná sjednocení. $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor

Nyní zavedeme jinou strukturu, nazývanou $\sigma$-algebra (kde $\sigma$ referuje k spočetným sjednocením)

$\boxed{\text{Def.}}$ Soubor podmnožin $\Sigma$ množiny $X$ (tzn. $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$) se nazývá $\sigma$-algebra $\overset{\text{df.}}{=}$

- $X \in \Sigma$
- $A \in \Sigma \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \Sigma$
- $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

$(X, \Sigma)$ se nazývá měřitelný prostor.

Poznámka ▸ Lze nahradit 2. a 3. bod v definici body

•• $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$

•• $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

▸ z prvních dvou vlastností $\Sigma$ algebry plyne, že $X, \emptyset \in \Sigma$.

Příklady ① $\{\emptyset, X\}$ je topologie i $\Sigma$-algebra

② $\mathcal{P}(X)$ je topologie i $\Sigma$-algebra

③ $\{\emptyset, \mathbb{R}, (0,1)\}$ je topologie v $\mathbb{R}$, ale není $\sigma$-algebra

④ Připomeň, že topologii v $\mathbb{R}^d$ je generována $B_\varepsilon(x_0)$, kde $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ jsou libovolné a $B_\varepsilon(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^d ; \|y - x_0\|_{\infty, \mathbb{R}^d} < \varepsilon\}$.

Topologie obsahuje "jen" otevřené množiny (neb jsou-li $A, B, A_\alpha$ otevřené $\Rightarrow A \cap B$ a $\bigcup A_\alpha$ jsou otevřené).

Povšimněme si, že v takto definované topologii jsou jejími generátory otevřené intervaly, které jsou dle definice (lebesgueovské) měřitelnosti (lebesgueovsky) měřitelné.

Není těžké nahlédnout, viz důkaz Věty 13.1 níže, že platí: $\underline{B_\varepsilon(x_0) \cap B_{\tilde\varepsilon}(x_1) \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$ a $\underline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon_n}(x_n) \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$.

a tedy

$$A \in \mathcal{T} \text{ pak } A \in \Lambda(\mathbb{R}^d).$$

Také vidíme, že je přirozené zavést (nejmenší) $\Sigma$-algebru generovanou topologií, tj. souborem všech otevřených množin. Protože otevřené množiny jsou, dle výše uvedeného, prvky $\Lambda(\mathbb{R}^d)$, tj. jsou lebesgueovsky měřitelné, tak se dá snadno nahlédnout, viz důkaz Věty 13.1, že takto generovaná $\Sigma$-algebra je podmnožinou $\Lambda(\mathbb{R}^d)$. Tato $\Sigma$-algebra se označuje $\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ a nazývá se <u>$\Sigma$-algebra borelovsky měřitelných množin</u>.

Obsahuje nejen otevřené, ale i uzavřené množiny, ale také spočetné průniky otevřených množin (tzv. množiny $G_\delta$), a všechna spočetná sjednocení uzavřených množin (tzv. množiny $F_\sigma$), atd. ($G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta}, \ldots$).

Ve Větě 13.1 si ukážeme, že $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je $\Sigma$-algebra. Odsud a z předchozího plyne, že

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda(\mathbb{R}^d)$$

což "dokazuje" tvrzení: „skoro všechny množiny jsou měřitelné".

---

Ozn. $G_\delta$, $F_\sigma$ pochází z němčiny: G ... F ... δ ... σ ...

Platí

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \Lambda(\mathbb{R}^d)$$

$\boxed{\text{Def}}$ Buď $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$. Pak zobrazení $\mu : \Sigma \to \underbrace{\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}}_{\langle 0, +\infty)}$

se nazývá **míra** $\overset{df}{\equiv}$

1) $\Sigma$ je $\sigma$-algebra
2) $\mu$ je nezáporná a $\mu(\emptyset) = 0$
3) $\mu$ je $\sigma$-aditivní, tj. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$

- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

a navíc, jsou-li $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i, j;\ i \neq j$

- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

$(X, \Sigma, \mu)$ se nazývá prostor s mírou

---

$\boxed{\text{Def.}}$ ▶ Řekneme, že $\boxed{\text{míra } \mu \text{ je úplná}}$ pokud platí:

Je-li $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $\mu(B) = 0$, pak $A \in \Sigma$

$[\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B) = 0] \Longrightarrow$ (a nutně $\mu(A) = 0$)

▶ Řekneme, že <u>míra $\mu$ je absolutně spojitá vzhledem k míře $\nu$</u>, píšeme $\boxed{\mu \ll \nu}$ $\overset{def}{\equiv}$ Je-li $A \in \Sigma$ a $\nu(A) = 0$, pak $\mu(A) = 0$.

---

$\boxed{\text{Věta 13.1}}$ ▶ Systém všech Lebesgueovsky měřitelných množin $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je $\sigma$-algebra

▶ Definujeme-li pro libovolné $f \in M^+(\mathbb{R}^d)$ zobrazení

$$\nu_f : \Lambda(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^*_{\geq 0} \text{ předpisem}$$

$$\nu_f(\Omega) := (L)\int_{\Omega} f\,dx := \int f \chi_{\Omega},$$

pak ▶ $\nu_f$ je (ii) úplná (i) míra, která je (iii) absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře $\lambda_d$ definované

$$\lambda(\Omega) \overset{ozn}{=} \lambda_d(\Omega) := \int \chi_{\Omega}. \qquad (\nu_f \ll \lambda_d)$$

Důkaz $\boxed{\text{Krok 1}}$ $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je $\Sigma$-algebra.

(a) $\boxed{\mathbb{R}^d \in \Lambda(\mathbb{R}^d)} \Leftrightarrow 1 \in M^+$, neboť $h_n = \chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$

a tedy $1 = \sup h_n \in M^+$ dle definice $M^+$.

(b) $\boxed{A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Rightarrow A \setminus B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$

Jsou-li $A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, tj. $\chi_A, \chi_B \in M^+$, pak viz Věta 3.3, Věta 3.11,

$$\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} \in M^+(\mathbb{R}^d)$$
$$\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} \in M^+(\mathbb{R}^d)$$

a proto

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_{A\setminus(B\cap A)} = \chi_A - \chi_{B\cap A} \in M^+(\mathbb{R}^d)$$

tak $A\setminus B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$.

(c) $\boxed{A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \bigcup A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$ neboť $\chi_{A_n} \in M^+$ a

tedy $\sup_n \chi_{A_n} \in M^+ \Leftrightarrow \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} \in M^+ \Leftrightarrow \bigcup A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$.

$\boxed{\text{KROK 2}}$ $\boxed{\text{Vlastnosti } \nu_f}$

(1) $\nu_f$ je definována na $\underline{\sigma\text{-algebře}}$ $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ a $\nu_f(\Omega) \geq 0$ pro $f \geq 0$ a $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ neboť $f\chi_\Omega \geq 0 \xRightarrow{\text{Věta 3.3}} \int f\chi_\Omega \geq 0$.

(2) Jsou-li $A_i \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, $i \in \mathbb{N}$, navzájem disjunktní, pak

$$\sum_{i=1}^\infty \nu_f(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \int f\chi_{A_i} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^k \int f\chi_{A_i} \overset{\text{aditivita}}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int f\chi_{\bigcup_{i=1}^k A_i} \underset{\chi_{\bigcup_{i=1}^k A_i} \nearrow \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}}{\overset{\text{Levi}}{=}} \int f\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i}$$

$$= \nu_f\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right).$$

(3) $\boxed{\nu_f \text{ je úplná}}$

Vskutku, je-li $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $\nu_f(B) = 0$ pak

$$\nu_f(B) = \int f\chi_B = 0 \underset{\text{V.3.8}}{\Rightarrow} f\chi_B = 0 \text{ s.v.} \Rightarrow f\chi_A = 0 \text{ s.v.}$$

$$\int f\chi_A = 0 \Longrightarrow \nu_f(A) = 0$$

(4) $\boxed{\nu_f \ll \lambda_d}$

Je-li $\lambda_d(E) = 0$, pak $\chi_E = 0$ s.v., pak $f\chi_E = 0$ s.v. $\Rightarrow \nu_f(E) = 0$.

## DVĚ DŮLEŽITÉ POZNÁMKY

(1) $\nu_f$ a speciálně Lebesgueova míra nejsou úplné na σ-algebře borelovsky měřitelných fcí $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (ani pro $d=1$).

(2) • Z předchozí věty plyne existence $\infty$-mnoha měr, které lze na $\mathbb{R}^d$ zavést. Výjimečnou vlastností Lebesgueovy míry je její normalizace na objem jednotkové krychle

$$\lambda_d([0,1]^d) = 1.$$

• Z předchozí věty plyne implikace

$$\boxed{\nu_f(\Omega) := \int_\Omega f\chi_\Omega \text{ kde } f\in L, f\geq 0} \Rightarrow \boxed{\nu_f \ll \lambda_d}$$

Platí (za předpokladu konečnosti míry $\lambda_d$ na $X$, definice je uvedena výše) obrácená implikace tzv Radon-Nikodymova věta:

Je-li $\nu \ll \lambda$ a $\lambda(X) < +\infty$,
pak $\exists f \geq 0, f\in L(X)$ tak, že $\nu(\Omega) = \int_\Omega f(x)\,dx$

Jiný zápis $\quad \nu \ll \lambda \Leftrightarrow \exists f\in L(X)\ \ \nu(\Omega) = \int_\Omega f(x)\,d\lambda(x)$

Fyzikální interpretace Buď $X \subset \mathbb{R}^3$ omezená, otevřená, souvislá.


Nechť $X$ představuje "spojité (homogenizované/průměrované)" prostředí (tekutiny, plyny, pevné látky). V takovém prostředí je přirozené požadovat:

je-li objem nějaké podmnožiny $\Omega\subset X$ nulový, je pak i hmotnost látky přiřazené této množině nulová.

$P\subset X$
$P \mapsto V(P)$
$P \mapsto M(P)$

jsou dvě míry. Výrok v $\boxed{\ldots}$ říká, že $M \ll V$.
Pak dle Radon-Nikodymovy věty existuje $\rho\in L^{+}(\Omega)$ tak, že $M(\Omega) = \int_\Omega \rho\, dV \quad \forall\, \Omega\in\Lambda(X)$.

$\rho$ se nazývá hustota

## DVĚ DŮLEŽITÁ/ZAJÍMAVÁ ROZŠÍŘENÍ

**1** Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ $(f \geq 0)$ spojitá, pak $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ nejen splňuje $F'(x) = f(x)$, ale (navíc) $\nu_f((a,x)) := \int_a^x f(s)\,ds$ je <u>míra</u> (úplná a <u>absolutně spoj. vzhledem k Lebesgueově míře</u>) a platí

$$\boxed{\nu_f((a,x)) = F(x) - F(a) \quad \text{a} \quad \nu_f((a,b)) = F(b) - F(a)}$$

Tyto poslední vztahy mohu zobecnit a zavést další/jiné míry obecněji.

<u>Buď $F$ neklesající na $\langle a,b \rangle$</u>. Pak $f$ může mít nejvýše spočetně bodů nespojitosti. Je-li $x_0$ bod nespojitosti, pak $F(x_0+) := \lim_{x \to x_0+} F(x)$ a $F(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} F(x)$, přičemž obě limity z monotónie existují a $F(x_0)$ může být jakákoliv hodnota mezi $F(x_0-)$ a $F(x_0+)$. (Pře)definujeme-li $F(x_0) = F(x_0+)$, pak $F$ je nejen <u>neklesající</u> na $\langle a,b \rangle$, ale také <u>spojitá zprava</u>. Platí:

**Tvrzení** ▸ Je-li $F$ neklesající fce na $\mathbb{R}$ spojitá zprava, pak existuje jediná míra $\mu$ (často značená $dF$) definovaná na $\sigma$-algebře Lebesgueovsky měřitelných množin taková, že

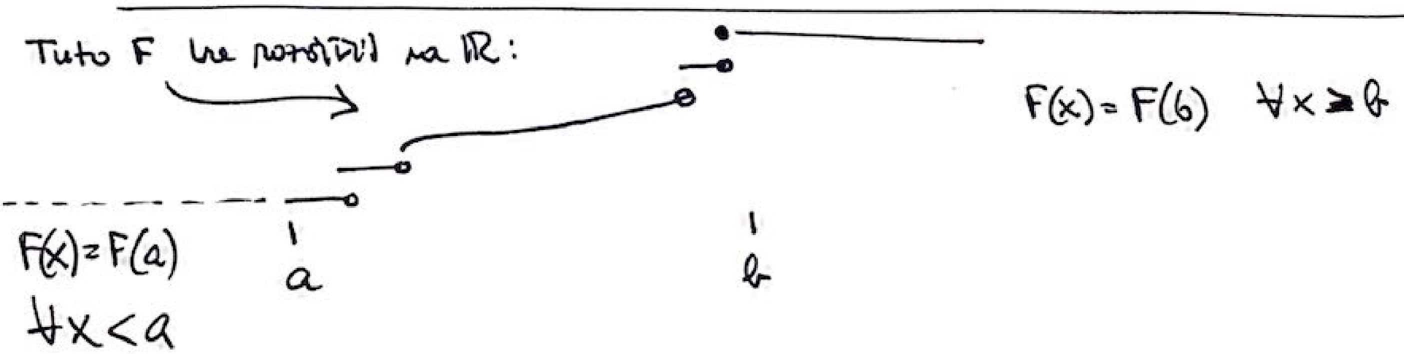
$$\mu((a,x]) = F(x) - F(a).$$

▹ Naopak, je-li $\mu$ míra definovaná na $\sigma$-algebře Lebesgueovsky měřitelných množin, která je konečná na omezených intervalech, pak $F$ definovaná

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((-x,0]) & x < 0 \end{cases}$$

je neklesající a spojitá zprava.

Tuto $F$ lze rozšířit na $\mathbb{R}$:



? K čemu je toto zobecnění vhodné? (užitečné)

Podobně jako jsme aproximovali plochu pod grafem nezáporné funkce, můžeme zkusit určit statický moment rovinné či prostorové oblasti. Moment hmotného bodu $x \in (a,b)$ hmotnosti $\mu$ vzhledem k počátku je roven $|x|\mu$. Máme-li n-bodů $x_i \in (a,b)$ s hmotností $\mu_i$, pak moment příslušný úsečce $(a,b)$ je $\sum_{i=1}^{m} |x_i|\mu_i$. Obecně: Je-li

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = b$$

dělení $(a,b)$, $\xi_j \in [\alpha_{j-1},\alpha_j)$ a je-li $\mu(x)$ hmotnost úsečky $[a,x)$. Pak pro $\forall j \in \{1,\dots,m\}$ je hmota úsečky

$$\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1})$$

Soustředíme-li tuto hmotu do bodu $\xi_j$, pak moment segmentu $(\alpha_{j-1},\alpha_j)$ je roven $|\xi_j|(\mu(\alpha_j)-\mu(\alpha_{j-1}))$

a moment $(a,b)$ vzhledem k počátku je přibližně

$$\sum_{j=1}^{m} |\xi_j| \left(\mu(\alpha_j)-\mu(\alpha_{j-1})\right)$$

Limitním přechodem dostaneme objekt, který lze označit

$$M = \int_a^b |x| \, d\mu(x) \quad \dots \text{ \underline{Stieltjesův} \underline{integrál}}$$

- Riemann-Stieltjess
- Lebesgue-Stieltjes

Místo $|x|$ může být jiná funkce:

např. $I = \int_a^b |x|^2 d\mu(x)$ ... moment setrvačnosti

nebo $J_k = \int_a^b |x|^k d\mu(x)$ ... k-tý moment

---

Také • Křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f \, ds = \int_a^b \underbrace{(f\circ\vec{\varphi})(t)}_{\geq 0} \underbrace{|\vec{\varphi}'(t)|}_{\text{délka } l} dt = \int_a^b (f\circ\varphi)\, dv$$

hustota drátu $\geq 0$

$v(t) = l(\varphi;(a,t))$

lze nahlížet jako Stieltjesův integrál k

• Křivkový integrál 2. druhu: $\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds} = \int_a^b (\vec{f}\circ\vec{\varphi})(t)\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt = \sum_{1}^{d} \int_a f_k(\varphi)\, d\varphi_k$

[2] Pravděpodobnostní prostor

[Def.] Řekneme, že $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ je konečná $\overset{def}{\equiv} \mu(X) < +\infty$

↳ σ-algebra měř. množin X

Řekneme, že $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ je σ-konečná $\equiv$ existují-li $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\boxed{\mu(X_n) < \infty}$ & $\boxed{X_n \nearrow X}$

(tzn. $X_{n+1} \supset X$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$)

Prostor s mírou $(X, \Sigma, P)$ ← σ-algebra; konečná míra taková, že $P(X) = 1$ se nazývá pravděpodobnostní prostor.

[Příklady] ① Buď $X = \{w_1, \dots, w_N\}$ konečná množina,

Buď $\{p_j\}_{j=1}^N$ nezáporná čísla taková, že $\sum_{j=1}^N p_j = 1$.

Buď $\Sigma$ systém všech podmnožin $X$, tzn. $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra

Pak pro $\forall A := \{w_{j_1}, \dots, w_{j_m}\} \in \Sigma$ s $1 \le j_1 \le \dots \le j_m \le N$

definujme $P(A) = \sum_{k=1}^{m} p_{j_k}$. Pak $(X, \Sigma, P)$ je diskrétní pravd. prostor

② $X = \mathbb{R}^d$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a $f \ge 0$ integrovatelná funkce tak, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dx = 1$$

[Je-li $d=1$, vol např. $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$]

Pak $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P)$ je pravděp. prostor, pokud $P(\Omega) = \int_\Omega f(x)\, dx$.

③ Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^d$ je pevný. Definujme $P(\Omega) = \begin{cases} 1 & x_0 \in \Omega \\ 0 & x_0 \notin \Omega \end{cases}$

Pak $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\delta), P)$ je také pravděpodobnostní prostor

↑ Diracova bodová míra. $P = \delta_{x_0}$

**Příklad** (konstrukce neměřitelné množiny) Tato konstrukce je založena na Axiomu výběru a jednoduchém vztahu ekvivalence mezi reálnými čísly z $[0,1]$.

Řekneme, že $x,y \in [0,1]$ jsou <u>ekvivalentní</u>, $x \sim y$, právě když $x - y \in \mathbb{Q}$ (rozdíl je racionální)
(snadno platí: $x \sim x$; $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; $x \sim y$ & $y \sim z \Rightarrow x \sim z$
tedy $x \sim y$ je ekvivalence)

Nyní rozdělíme $[0,1]$ do tříd ekvivalence, např.

- $\mathbb{Q} \subset [0,1]$ tvoří jednu třídu
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + p$, kde $p \in \mathbb{Q}$ tak, že $\frac{\sqrt{2}}{2} + p \in [0,1]$ tvoří další třídu
- atd

Dvě třídy ekvivalence jsou buď stejné nebo disjunktní. A platí
$$[0,1] = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_\alpha \quad \text{kde } \mathcal{E}_\alpha \text{ je jedna třída ekvivalence.}$$

Nyní definujme naši množinu
$$N = \{x_\alpha\}_\alpha \quad \text{kde } x_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \text{ je jediný z } \mathcal{E}_\alpha.$$
Tato konstrukce je možná díky axiomu výběru: Buď $E$ množina a $\{E_\alpha\}$ soubor neprázdných podmnožin $E$, přičemž množina indexů není spočetná. Pak existuje funkce $\alpha \mapsto x_\alpha$ (výběrová funkce) tak, že $x_\alpha \in E_\alpha$ $\forall \alpha$.

$\boxed{\text{Ukážeme, že } N \text{ není měřitelná.}}$ Sporem. Nechť $N$ je měřitelná.

Uvažujme posunutí množiny $N$ typu
$$N_k = N + r_k$$
kde $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ představuje všechna racionální čísla z $\langle -1, 1 \rangle$

Není obtížné ověřit (OVĚŘTE si), že:

- $N_k$ jsou navzájem disjunktní
- $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$.

Kdyby $N$ byla měřitelná, pak jsou $N_k$ také měřitelné $\forall k \in \mathbb{N}$.
Protože $N_k$ jsou navzájem disjunktní, tak

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N_k) \leq 3.$$

Protože $N_k$ jsou jen posunutí $N$ tak $\lambda_1(N_k) = \lambda_1(N)$.
Tedy

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N) \leq 3,$$

což vede ke sporu jak v případě kdy $\lambda_1(N) = 0$, nebo když $\lambda_1(N) > 0$

$\boxed{\text{Ⓠ}}$