<u>Témata:</u> 1) Nehomogenní transportní rovnice

2) Odvození d'Alembertova vzorečku pomocí transportních rovnic

3) Fundamentální řešení pro vlnovou rovnici a řešení Cauchyho úloh pomocí F.T. v distribucích.

Nehomogenní transportní rovnice s konstantními koeficienty

Nyní si ukážeme, jak se pomocí metody charakteristik vyřešit následující rovnice/úloha:

$$\boxed{\begin{array}{llll} (11) & \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b}\cdot\nabla u + cu = f & \text{v} & (0,T)\times\mathbb{R}^d \\ (12) & u(0,\cdot) = u_0 & \text{v} & \mathbb{R}^d \end{array}}$$

kde $\vec{b}\in\mathbb{R}^d$, $c\in\mathbb{R}$, $u_0:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ a $f:(0,T)\times\mathbb{R}^d$ jsou DATA úlohy.

Vyjdeme opět z charakteristického systému $\boxed{\begin{array}{l}\dot{t}=1\\ \dot{x}=b\end{array}}$, který dává $\boxed{t=s+\bar{t} \quad \text{a} \quad x=bs+\bar{x}}$ pro $(\bar{t},\bar{x})\in(0,T)\times\mathbb{R}^d$ libovolné.

(+) Definujme $z(s) = u(s+\bar{t}, bs+\bar{x})$

Nyní neplatí $\dot{z}(s)=0$, ale stále platí $\dot{z}(s) = \frac{\partial u}{\partial t}(s+\bar{t}, bs+\bar{x}) + \vec{b}\cdot\nabla u(\dots)$

Tedy z (11) plyne

$$\dot{z}(s) + cz(s) = f(s+\bar{t}, bs+\bar{x})$$

Odsud (e^{cs} je integrační faktor) plyne

$$\left(z(s)e^{cs}\right)^{\cdot} = f(s+\bar{t}, bs+\bar{x})e^{cs}$$

Integrací přes s od $-\bar{t}$ do 0 dostáváme

$$z(0) = z(-\bar{t})e^{-c\bar{t}} + \int_{-\bar{t}}^{0} f(s+\bar{t}, bs+\bar{x})\, e^{cs}\, ds$$

Dosazením (+) a substitucí $s' = s+\bar{t}$ v integrálu dostaneme

$$u(\bar{t},\bar{x}) = u_0(\bar{x}-b\bar{t})e^{-c\bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} e^{c(s-\bar{t})} f(s, b(s-\bar{t})+\bar{x})\, ds$$

neboli

$$\text{(NT)} \quad \boxed{u(t,x) = u_0(x-bt)e^{-ct} + \int_0^t \underbrace{e^{c(s-t)}}_{=e^{-c(t-s)}} f(s, b(s-t)+x)\, ds}$$

což je hledané řešení.

Všimněte si role kladného/záporného koeficientu c a jeho vlivu na řešení ($c>0$ tlumí, $c<0$ zesiluje velikost dat exponenciálně)

OPĚT: PRUHY NAD t a x JSME MOHLI OD POČÁTKU VYNECHAT.

$\boxed{\text{Odvození d'Alembertova vzorečku pomocí výsledků pro transportní rovnici}}$

Víme: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}\right) u$ (i)

Označme $\boxed{v := \frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial u}{\partial x}}$ (ii)

Pokud u řeší $\Box u = 0$, pak $\frac{\partial v}{\partial t} + k\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ a platí $\underline{v(t,x) = G(x-kt)}$ (iii)

Tedy z (ii) a (iii), u splňuje

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial u}{\partial x} = G(x-kt)$$

Nyní buď využiji vzoreček (NT) nebo opět provedu výpočet:

$$\left.\begin{aligned}\dot{t} &= 1\\ \dot{x} &= -k\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}t(s) &= s+t\\ x(s) &= -ks+x\end{aligned} \quad \text{a} \quad z(s) = u(s+t, x-ks) \text{ splňuje}$$

$$\dot{z}(s) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial u}{\partial x}\right)(s+t, x-ks) = G\big(x-ks-k(t+s)\big) =$$

Integrací od $-t$ do 0: $u(t,x) = u_0(x+kt) + \int_{-t}^{0} G\big(\underbrace{x-ks-k(t+s)}_{y}\big)\,ds$

$$\boxed{\begin{aligned}2ks &= x-y-kt\\ ds &= \frac{-1}{2k}\end{aligned}} \quad \begin{aligned}&s=-t \Rightarrow y = x+kt\\ &s=0 \Rightarrow y = x-kt\end{aligned}$$

$$u(t,x) = u_0(x+kt) - \frac{1}{2k}\int_{x+kt}^{x-kt} G(y)\,dy$$

a tedy

(*) $$\boxed{u(t,x) = u_0(x+kt) + \frac{1}{2k}\int_{x-kt}^{x+kt} G(y)\,dy}$$

- řeší rci $\Box u = 0$
- splňuje $u(0,x) = u_0(x)$

Zbývá splnit $\partial_t u(0,\cdot) = u_1$. Avšak:

$$\partial_t u(t,x) = k\,u_0'(x+kt) + \frac{1}{2}\big[G(x+kt) + G(x-kt)\big]$$

$t=0$ $$u_1(x) = k\,u_0'(x) + G(x) \Rightarrow \underline{G(x) = u_1(x) - k\,u_0'(x)}$$

Po dosazení výsledku do (*) máme:

$$\boxed{u(t,x) = \frac{u_0(x+kt) + u_0(x-kt)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-kt}^{x+kt} u_1(y)\,dy}$$

Cv3|3

Vlnová rovnice v distribucích. Fundamentální řešení

Připomeň L ... lineární diferenciální operátor, který může generovat (obecně) jak ODR tak PDR

Fundamentální řešení je distribuce splňující $u_F \in \mathcal{D}'$ nebo nalezení $\mathcal{S}'$

$$\boxed{L u_F = \delta}$$

▷ Ranné potorování $\boxed{\text{Derivace } H(t) = \delta \quad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$ kde $H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq \\ 0 & t < \end{cases}$

je Heavisidova fce splňující/řešící $\boxed{\begin{array}{l} y'(t) = 0 \\ y(0+) = 1 \\ y \equiv 0 \text{ pro } t < \end{array}}$

Iterativní: Je-li $Lx(t) := \overset{(m)}{x}(t) + a_{m-1}\overset{(m-1)}{x}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0(x(t))$
(obyčejný lin. dif. operátor)

a pokud $z(t)$ řeší $\boxed{\begin{array}{l} Lz(t) = 0 \quad \text{v } (0,\infty) \\ z(0+) = z'(0+) = \dots = \overset{(m-2)}{z}(0+) = 0 \\ z^{(m-1)}(0+) = 1 \end{array}}$ (✲)

pak $\boxed{x_F := H(t) z(t) \text{ řeší}}$ $Lx_F = \delta_0(t)$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

OVĚŘTE!

▷ Význam fundamentálního řeš. pro obecný lin. $\left\{\begin{array}{l} \text{obyč.} \\ \text{parc.} \end{array}\right\}$ dif. operátor:

Řešení $Lx(t) = f$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ získat konvolucí f s x_F

Vskutku $L(x_F * f) \underset{\uparrow}{=} Lx_F * f \underset{\uparrow}{=} \delta * f = f$

↑ linearita a vlastnost konvoluce o derivování; x_F Fund. řeš.

K ověření je třeba ukázat, že $\langle Lx_F, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Avšak: $\langle Lx_F, \varphi \rangle = \langle \overset{(m)}{x_F}, \varphi \rangle + a_{m-1} \langle \overset{(m-1)}{x_F}, \varphi \rangle + \dots + a_1 \langle x_F', \varphi \rangle + a_0 \langle x_F, \varphi \rangle$

(definice distributivní derivace) $\to = (-1)^m \langle x_F, \varphi^{(m)} \rangle + (-1)^{m-1} a_{m-1} \langle x, \varphi^{(m-1)} \rangle + \dots - a_1 \langle x_F, \varphi' \rangle + a_0 \langle x_F, \varphi \rangle$

($x_F \in L^1_{loc} \Rightarrow$ reg. distribuce, $x_F = 0$ na $(-\infty, 0)$) $\to = (-1)^m \int_0^{+\infty} z(t) \varphi^{(m)} dt + (-1)^{m-1} a_{m-1} \int_0^{+\infty} z(t) \varphi^{(m-1)} + \dots - \int_0^{+\infty} z(t)(a_1 \varphi' - a_0 \varphi)$

$$\underset{\substack{\text{per partes +} \\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ (✲)}}{=} \int_0^\infty \underbrace{Lz(t)}_{=0} \varphi(t)\, dt + \underbrace{\overset{(m-1)}{z}(0)}_{=1} \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle .$$

▨

- Linearita (princip superpozice) vlnové rovnice umožňuje rozdělit řešení Cauchyho úlohy

$$(W_{\text{cauchy}}) \qquad \Box u = f \ \text{ v } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \quad u(0,\cdot) = u_0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 \text{ v } \mathbb{R}^d$$

má tři jednodušší úlohy:

(I) $\Box u = 0$ v $\underbrace{(0,+\infty)\times\mathbb{R}^d}_{Q_\infty}$, $\left.\begin{array}{l} u(0,\cdot) = u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = 0 \end{array}\right\}$ v $\mathbb{R}^d$

(II) $\Box u = 0$ v Q_∞, $\left.\begin{array}{l} u(0,\cdot) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 \end{array}\right\}$ v $\mathbb{R}^d$

(III) $\Box u = f$ v Q_∞, $\left.\begin{array}{l} u(0,\cdot) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = 0 \end{array}\right\}$ v $\mathbb{R}^d$

Ukážeme si, že řešení je dáno vztahem

$$(\check{R}W_{\text{cauchy}}) \qquad u(t,x) = \partial_t\left(u_0 \overset{(x)}{*} e^{(II)}\right) + u_1 \overset{(x)}{*} e^{(II)} + f \overset{(t,x)}{*} \underbrace{\left(H(t)\, e^{(II)}\right)}_{\chi_F}$$

konvoluce vzhledem k x ... konvoluce vzhledem k t i x.

kde $e^{(II)}$ „fund. řeš." řeší $\Box e^{(II)} = 0$ v Q_∞, $e^{(II)}(0,\cdot) = 0$ v $\mathbb{R}^d$, $\frac{\partial e^{(II)}}{\partial t}(0,\cdot) = \delta_0$ v $\mathbb{R}^d$

Nyní učiníme pozorování, která (pomocí F.T.)

(A) dají do souvislosti úlohy (I) a (II)

(B) dají do souvislosti (I), (II) na jedné straně s úlohou (III)

Ad (A) Souvislost se snadno nahlédne přes Fourierovu transformaci (F.T.).

Aplikací F.T. na $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \Delta u = 0$ dostaneme

$$(W_{F.T.}) \qquad \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + 4\pi^2 |\xi|^2 k^2 \hat{u}\right)(t,\xi) = 0$$

a počáteční podmínky pro úlohy (I) a (II) dávají:

(PP) (I) $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0,\xi) = 0$ (II) $\hat{u}(0,\xi) = 0$, $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi)$

Řešení $(W_{F.T.})$ v $\mathbb{R}^d$ má tedy tvar*)

$$\hat{u}(t,\xi) = A(\xi)\sin(2\pi k|\xi|t) + B(\xi)\cos(2\pi k|\xi|t)$$

a počáteční podmínky (PP) implikují

Ad (I) $\quad A(\xi) = 0, \quad B(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$

Ad (II) $\quad B(\xi) = 0, \quad A(\xi) = \dfrac{\hat{u}_1(\xi)}{2\pi|\xi|k}$

*) je-li $\xi = 0$, pak $\hat{u}(t,0) \underset{0}{=} A(0)t + B(0)$

tedy $$\hat{u}^{(I)}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\cos\left(2\pi k|\xi|t\right) = \hat{u}_0(\xi)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(2\pi k|\xi|t)}{2\pi k|\xi|}\right)$$

$$\hat{u}^{(II)}(t,\xi) = \hat{u}_1(\xi)\,\frac{\sin 2\pi k|\xi|t}{2\pi k|\xi|}$$

(tento vztah rozšíříme pro $\xi=0$ spojitě limitou $\hat{u}_1(0)t$).

Speciálně tedy vidíme, že:

$e^{(I)}$, $e^{(II)}$ dané jako distributivní řešení úloh

$$\boxed{\begin{aligned} \Box e^{(I)} &= 0 \quad v\ Q_\infty \\ e^{(I)}(0,\cdot) &= \delta_0 \\ \frac{\partial e^{(I)}}{\partial t}(0,\cdot) &= 0 \end{aligned}\ \Big\}\ v\ \mathbb{R}^d} \quad a \quad \boxed{\begin{aligned} \Box e^{(II)} &= 0 \quad v\ Q_\infty \\ e^{(II)}(0,\cdot) &= 0 \\ \frac{\partial e^{(II)}}{\partial t}(0,\cdot) &= \delta_0 \end{aligned}\ \Big\}\ v\ \mathbb{R}^d}$$

splňují $\widehat{e^{(I)}} = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{e^{(II)}}$, což dává vztah

$$\boxed{e^{(I)} = \frac{\partial}{\partial t}e^{(II)}}$$

Znám-li $e^{(II)}$, vím jak určit $e^{(I)}$.

$\boxed{\text{Ad (B)}}$ Hledejme fundamentální řešení x_F : $\Box x_F = \delta_0(t)\otimes\delta_0(x)$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$

aplikací F.T. v prostoru dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial^2 \hat{x}_F}{\partial t} + 4\pi^2 k^2|\xi|^2\,\hat{x}_F = \delta_0(t)}$$

což pro pevné ξ je ODR 2. řádu, pro které hledám fundamentální řešení.

Dle úvodu cvičení (viz str. Cv3|3) vím že $\hat{x}_F$ souvisí s řešením počáteční úlohy pro ODR:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{e^{(II)}}}{\partial t^2} + 4\pi^2 k^2|\xi|^2\,\widehat{e^{(II)}} &= 0 \\ \widehat{e^{(II)}}(0,\xi) &= 0 \\ \frac{\partial \widehat{e^{(II)}}}{\partial t}(0,\xi) &= 1 \end{aligned}}$$

přičemž jsme si ohodili řešení $\hat{e}^{II}$ je zřejmé porovnáním úloh.

Přesněji:

$$\hat{x}_F(t,\xi) = H(t)\,\widehat{e^{(II)}}(t,\xi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{F.T. vzhledem k } x}}{=} \widehat{H(t)\,e^{(II)}(t,x)}(\xi)$$

což dává

$$\boxed{x_F(t,x) = H(t)\,e^{(II)}(t,x)}$$

TAK JSME UKÁZALI PLATNOST ($\check{R}W_{\text{cauchy}}$).

Z předchozího víme, že (srovnej s 2. řádkem na str. cv3/5), že

$$\hat{e}^{II}(t,\xi) = \frac{\sin 2\pi \varkappa |\xi| t}{2\pi \varkappa |\xi|} \qquad (\text{a rovné } t \text{ pro } |\xi| = 0)$$

Minulý semestr, v kapitole Fourierova transformace, jsme spočítali

$$\widehat{\chi_{[-b,b]}(x)}(\xi) = \frac{\sin 2\pi b |\xi|}{\pi |\xi|}$$

Tedy, z obou vzorců plyne, že pro $\boxed{d=1}$

$$e^{II}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi}\left(\frac{\sin 2\pi \varkappa |\xi| t}{2\pi \varkappa |\xi|}\right) = \frac{1}{2\varkappa}\chi_{[-\varkappa|t|,\varkappa|t|]}(x)\,\operatorname{sgn} t$$

a

$$x_F(t,x) = \frac{1}{2\varkappa}\chi_{[-\varkappa|t|,\varkappa|t|]}(x)\,H(t).$$