

Posloupnosti funkcíBodová a stejnoměrná konvergence

Příklad 1 Platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n$?

$x \rightarrow 1^-$ $x \rightarrow 1^-$

Jak na to? $\leftarrow$ užít věty
výpočtem

- Výpočtem

LHS: $f_n \rightarrow f = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad (-1, 1]$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$ ✓

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$ ✓

RHS: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ✓

$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ✗

- Užít věty

Věta 10.3 (O řadě limit $n \rightarrow \infty$ a $x \rightarrow x_0$ a zachování spojitosti)

$f, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, x_0 \in I$

(P1) $f_n \Rightarrow f$ v I

(P2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) =: c_n$

$\left. \begin{array}{l} \text{(P1)} \\ \text{(P2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(T1)} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n =: c \\ \text{(T2)} c = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \end{array}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

? $f_n \Rightarrow 0$ na $(-1, 1)$?

$\epsilon_n = \sup_{x \in (-1, 1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-1, 1)} |x^n| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0 \quad \times \quad f_n \not\Rightarrow 0 \text{ na } (-1, 1)$

? na $[-1+\delta, 1-\delta]$: $\epsilon_n = \sup_{x \in [-1+\delta, 1-\delta]} |x^n| = (1-\delta)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \checkmark \quad f_n \Rightarrow 0 \text{ na } [-1+\delta, 1-\delta]$

$1 > \delta > 0$

Ložalce stejnoměrná konvergence: $f_n \xrightarrow{\text{lože}} 0$ na $(-1, 1)$

Měl bych dotaz ohledně lokálně stejnoměrné konvergence. My jsme si ukazovali na příkladu x^n v $\mathbb{R}$, že nejsme stejnoměrně konvergentní kvůli $x = 1$ v intervalu $[0, 1]$, a pak se zmínilo, že jsme tam lokálně stejnoměrně konvergentní, což ale samo o sobě vyžaduje kompaktní množinu (nebo tak se to zmínilo v definici), tj. zase $[0, 1]$. Míhla se volba $[0, 1 - \delta]$, " δ malé", ale pro δ jdoucí k nule dostanu $[0, 1)$ což už není kompaktní. Malý komentář by jistě zvládl rozestřít zmatení.

"Konvergovat lokálně stejnoměrně v M " znamená, podle definice, "konvergovat stejnoměrně v každé kompaktní podmnožině M ". Stačí takhle pro rozestření zmatení? Vráťím se k tomu zítra na cvičení.

Speciálně: $f_n \in C(I)$ a $f_n \Rightarrow f \text{ v } I \Rightarrow f \in C(I)$!!
Důležité: $f_n \in C(I)$, $f_n \rightarrow f \text{ v } I$ bodově
a $f \notin C(I) \Rightarrow f_n \not\Rightarrow f \text{ v } I$.

Příklad 2 $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$

Platí $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$?

Je $\left\{ \begin{array}{l} \text{Věta 10.4} \\ \text{Výpočet} \end{array} \right.$

Věta 10.4

- $f_n \Rightarrow f \text{ na } (a, b)$
- $\exists (a, b) \int_a^b f_n(x) dx$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{Existuje } (a, b) \int_a^b f(x) dx \\ \cdot \text{Definujeme-li} \\ F_n(x) := \int_a^x f_n(t) dt \\ F(x) := \int_a^x f(t) dt, \text{ pak} \\ F_n \Rightarrow F \text{ v } (a, b) \\ \cdot \text{Speciálně} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \end{array} \right.$

- Výpočet:

LHS: $nx e^{-nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$\int_0^1 0 dx = 0$

RHS: $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx e^{-nx^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx^2} (-2nx) dx = -\frac{1}{2} [e^{-nx^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-n})$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{e^n}) = \frac{1}{2}$

? $f_n \Rightarrow ? \text{ na } [0, 1]$

$\rightarrow f_n \not\Rightarrow 0 \text{ na } [0, 1]$

$\sigma_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [0, 1]} \frac{nx e^{-nx^2}}{f_n(x)}$

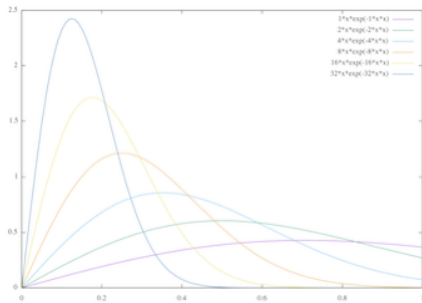
$f_n(0) = 0$

$f_n(1) = ne^{-n}$

$f'_n(x) = ne^{-nx^2} (1 - 2nx^2) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2n}} \in (0, 1)$

$f_n(x)$ klesá na $(0, \frac{1}{\sqrt{2n}})$, klesá na $(\frac{1}{\sqrt{2n}}, 1)$

$\sigma_n = f_n(x_{\max}) - f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = n \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-n \frac{1}{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2e}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \neq 0$



- Ale: $x_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$

$\forall \delta > 0 \exists n_0 : \delta > \frac{1}{\sqrt{2n_0}} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \delta > x_{\max}^{(n)}$

σ_n na $[\delta, 1] \rightarrow f_n(x)$ klesá na $[\delta, 1]$

$\Rightarrow \sigma_n = f_n(\delta) = n\delta e^{-n\delta^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \checkmark$

$f_n(x) \rightarrow 0$ na $[\delta, 1] \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{f_s} (0, 1)$
 $\uparrow \delta > 0$

$\Rightarrow$ tedy na $[\delta, 1]$ je možné $\int_0^1 \lim_n \checkmark$

Ověřme výpočtem:

LHS: slabě = 0

RHS: $= -\frac{1}{2} [e^{-nx^2}]_0^1 = \frac{1}{2} [e^{-n\delta^2} - e^{-n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \checkmark$



Příklad 3 $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$

Plati $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=0}$?

Věta 10.5

(P1) $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in I \exists f'_n(x)$
 $\rightarrow$ (P2) $f'_n \rightrightarrows G \sim I$
 (P3) $\exists x_0 \in I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ existuje

$\left. \begin{array}{l} (P1) \forall x \in I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ ex.} =: f(x) \\ (P2) \forall I' \subset I \text{ otevřený } f_n \rightrightarrows f \sim I' \end{array} \right\} \Rightarrow$ (P3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$

$G \quad f'$

- Výpočet:

LHS: $f'_n(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + x^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}} \Big|_{x=0} = 0$

RHS: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} = \sqrt{x^2} = |x| = f(x) \quad f_n(x) \rightarrow f \text{ na } (-\infty, \infty)$
 $\parallel$
 $|x|$

$f'(0)$ neexistuje $\Rightarrow$ Rovnost neplatí.

$f_n \rightrightarrows f$, tedy $f \rightrightarrows |x|$ na $(-\infty, \infty)$

$|x| \leq f_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} \leq |x| + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$
 $x^2 \leq \frac{1}{n^2} + x^2 \leq x^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2|x|}{n}$

$$\underline{f'_n \Rightarrow ?}$$

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}}$$

$$\frac{1}{0} = \frac{0}{0} = -1$$

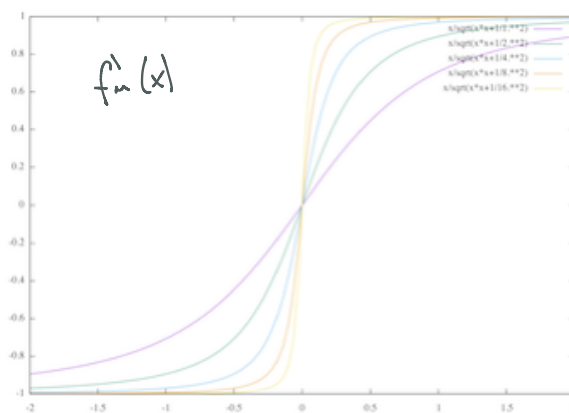
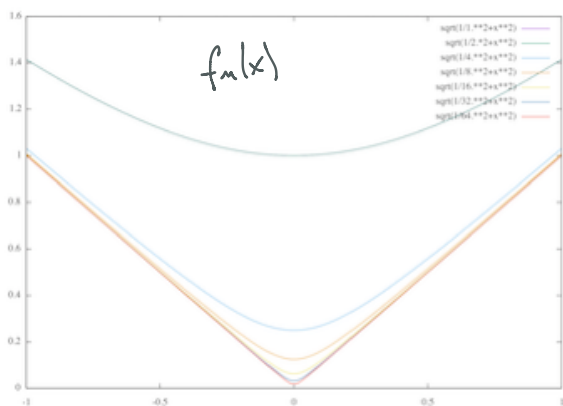
• Bodová: $f'_n(x) \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \text{sgn } x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$$\leadsto f'_n(x) \Rightarrow 1 \quad [0, \infty)$$

$$f'_n(x) \Rightarrow -1 \quad (-\infty, -\delta]$$

$$f'_n \xrightarrow{\text{loc}} f \text{ na } (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$\text{ kde } \tilde{f} < \begin{cases} = 1 & x > 0 \\ = -1 & x < 0 \end{cases}$$



Příklad 4 (na víkend) $f_n(x) = n^\beta x e^{-nx}$ $\beta \in \mathbb{R}$ parameter

A. Pro jaká β $f_n(x) \rightarrow$ na $[0,1]$

B. — " — $f_n(x) \Rightarrow$ na $[0,1]$

C. — " — $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

check Slack
for answers :)

