Příklad 1

Pro všechny funkce $y = y(x)$ patřící do prostoru $C^1([1,3])$ a splňující okrajové podmínky $y(1) = 1,\ y(3) = 4$ uvažuj funkcionál

$$\Phi(y) = \int_1^3 \left(2y - yy' + xy'^2\right) dx.$$

Najdi extremálu tohoto funkcionálu a urči, zda se jedná o minimizér, maximizér, nebo ani jedno.

Označme si $L(x, y(x), y'(x)) = 2y - yy' + xy'^2$ a využijme Euler-Lagrangeovu rovnici na nalezení funkcí pro které je funkcionál $\Phi(y)$ stacionární. E-L: $-\left(\frac{\delta L}{\delta y'}\right)' + \frac{\delta L}{\delta y} = 0$.

$$-\left(\frac{\delta L}{\delta y'}\right)' = (y - 2xy')' = y' - 2y' - 2xy''$$

$$\frac{\delta L}{\delta y} = 2 - y'$$

Oba členy sečteme a budeme řešit diferenciální rovnici

$$y' - 2y' - 2xy'' + 2 - y' = 0$$

$$-2xy'' - 2y' = -2$$

$$xy'' + y' = 1 \qquad u = y'$$

$$xu' + u = 1$$

$$\frac{u'}{1-u} = \frac{1}{x}$$

$$-\ln(1-u) = \ln(x)$$

$$u = 1 - \frac{1}{x}$$

$$y = x - c_1 \ln(x) + c_2$$

a z počátečních podmínek určíme konstanty: $y(x) = x + \frac{1}{\ln 3}\ln(x)$.

Budeme zjišťovat zda-li je Φ na naší množině (viz zadání) konvexní či nikoliv. Spočteme si Hessián

$$\nabla^2 L_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2x \end{pmatrix}$$

Dostali jsme matici, která není pozitivně definitní. Musíme tedy spočítat druhou Gateauxovskou derivaci

$$d^2\Phi(y)(h,h) = \frac{d}{dt^2}\bigg|_{t=0} \int_1^3 \left(2(y+th) - (y+th)(y'+th') + x(y'+th')^2\right) dx =$$

$$= \int_1^3 \left(2xh'^2\right) dx \geq 0$$

pro každé y, h ⇒ Φ je konvexní ⇒ y_0 je globální minimum

Vyjádříme s G. derivaci v konkrétním bodě a jde očividně o to samé

$$d^2\Phi(y_0)(h,h) = \int_1^3 \left(2xh'^2\right) dx$$

Pokračujeme k Jacobiho rovnici, kde vidíme, že $P(x) = 2x$ a $Q(x) = 0$.

$$-(2xh')' = 0$$

tady se používá [illegible] $\rangle$

Tedy výraz $2xh' =$ konst. tedy musí platit $h' = \frac{a}{x}$, $h(x) = a\ln(x) + b$. Otázka je jestli existuje $x_0 \in (1, 3>$ a $\exists h \neq 0$ řešení této rovnice

$$a \ln x + b = 0 \qquad a \ln x_0 + b = 0$$
$$a \ln 1 + b = 0 \Rightarrow \cancel{a+} b = 0 \quad \Rightarrow a \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

a tedy netriviální řešení neexistuje (bod $x = 3$ už nemusíme řešit)? a tudíž zde není konjugovaný bod. Nakonec spočteme

tohle jsem úplně nepochopil?

$$\frac{\delta^2 L}{\delta y'^2} = 2x > 0$$

a máme splněné tři podmínky, které zaručují že nalezená extremála je lokální minimizér. !

Příklad 2

Pro všechny funkce $y = y(x)$ patřící do prostoru $C^1([0, \pi])$ a splňující okrajové podmínky $y(0) = 9$, $y(\pi) = 9e^{\pi}$ uvažuj funkcionál

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi} \left(y'^2 - \frac{25}{9} y^2 + 68 e^x y \right) dx.$$

Najdi extremálu tohoto funkcionálu a urči, zda se jedná o minimizér, maximizér, nebo ani jedno.

Opět nejdříve najdeme řešení Euler-Lagrangeovi rovnice.

$$-\left(\frac{\delta L}{\delta y'}\right)' + \frac{\delta L}{\delta y} = 0$$
$$-2y'' - \frac{50}{9} y + 68 e^x = 0$$
$$y'' + \frac{25}{9} y = 34 e^x$$

Najdeme řešení homogenní rce:

$$\lambda^2 + \frac{25}{9} = 0$$
$$\lambda = \pm \frac{5i}{3}$$
$$y_h = c_1 e^{\frac{5i}{3}x} + c_2 e^{\frac{-5i}{3}x} = c_1 \cos\left(\frac{5}{3}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{5}{3}x\right)$$

Partikulární řešení najdeme velmi jednoduše, když budeme uvažovat $y = Ae^x$. Pak dostáváme z rovnice $y = 9e^x$ a celkové řešení

$$y(x) = c_1 \cos\left(\frac{5}{3}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{5}{3}x\right) + 9e^x$$
$$y(x) = 9e^x$$

Z okrajových podmínek zjistíme, že $c_1 = c_2 = 0$. Zbývá zjistit jestli jde o minimizér, maximizér, nebo ani jedno. Určíme první G. derivaci

$$d\Phi(y)(h) = \lim_{t \to 0} \int_0^{\pi} \frac{d}{dt} \left((y + th)'^2 - \frac{25}{9}(y + th)^2 + 68 e^x (y + th) \right) dx =$$
$$= \int_0^{\pi} \left(2y'h' - \frac{50}{9} yh + 68 e^x h \right) dx$$
$$d^2\Phi(y)(h, h) = \lim_{t \to 0} \int_0^{\pi} \frac{d}{dt} \left(2(y' + th')h' - \frac{50}{9}(y + th)h + 68 e^x h \right) dx =$$
$$= \int_0^{\pi} \left(2h'^2 - \frac{50}{9} h^2 \right) dx$$

Z Jacobiho rce dostáváme $(P(x) = 2,\ Q(x) = -\frac{50}{9})$

$$-(2h'(x))' - \frac{50}{9}h(x) = 0$$

ovšem takovou to homogenní diferenciální rovnici druhého řádu jsme před chvílí řešili a tedy víme, že

$$h(x) = c_1 \cos\left(\frac{5x}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{5x}{3}\right)$$

Nakonec postupujeme stejně jako u prvního příkladu

$$c_1 \cos\left(\frac{5 \cdot 0}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{5 \cdot 0}{3}\right) = 0$$ $\Rightarrow c_1 = 0$

$$c_1 \cos\left(\frac{5 \cdot x_0}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{5 \cdot x_0}{3}\right) = 0$$ pozor

$c_2 \sin\left(\frac{5}{3}x_0\right) = 0$

$x_0 \in (0, \pi\rangle$, ale $x_0 = \frac{3}{5}\pi$ je konjugovaný bod

ovšem opět nám musí vyjít, že $c_1 = c_2 = 0$ a tedy jsme nenašli konjugovaný bod. Poslední krok:

$$\frac{\delta^2 L}{\delta y'^2} = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ y_0 není lokální extrém ! $-0{,}1$

Jde tedy opět o minimizér.

Příklad 3

Dokažte metodami variačního počtu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'^2 dx.$$

Odečteme levou stranu rovnice a budeme hledat minimizér funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'^2 - y^2\ dx.$$

Myšlenka je taková, že když najdeme $y_0 = y_0(x)$ minimální které splňuje podmínky (přepsanou, aby na levé straně byla nula) tak pak i ostatní funkce (musí to splňovat všechny) budou tuto podmínku splňovat. Nejdříve najdeme extremálu pomocí E-L rce:

$$-2y'' - 2y = 0$$
$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Okrajové podmínky jsou $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$, pak ovšem vychází, že $y(x) = 0$, protože obě konstanty jsou nulové. Nalezneme druhou G. derivaci

$$d^2\Phi(y)(h,h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2h'^2 - 2h^2\right) dx$$

Jacobiho rce.:

$$-(2h')' - 2h = 0$$
$$h'' + h = 0$$

Dostáváme opět stejnou diferenciální rovnici, opět zde není konjugovaný bod a platí

$$\frac{\delta^2 L}{\delta y'^2} = 2 > 0$$

Jde tedy o lokální minimizér jak se dalo očekávat a tudíž tato nerovnost platí.

vše bohužel nestačí, potřebujete ukázat, že y_0 je globální minimum

Druhá část:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx \leq K \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y')^2 dx.$$

Opět budu hledat minimizér následujícího funkcionálu

$$\Phi_K(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(y')^2 - y^2 dx.$$

Použij Lagrangeův multiplikátor a označím si $L(x, y, y') = 1 \cdot y'^2 - y^2 - \lambda y$, dále budu řešit E-L rci:

$$-2y'' - 2y - \lambda = 0$$

$$y'' + y = -\frac{\lambda}{2}$$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_p = -\frac{\lambda}{2}$$

$$y(x) = -\frac{\lambda}{2} + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Tuto funkci dosadíme do vazby a získáme vztah mezi konstantami a Lagrangeovým multiplikátorem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\lambda}{2} + c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0$$

$$-\frac{\lambda\pi}{4} + c_1 + c_2 = 0$$

$$\lambda = \frac{4c_1 + 4c_2}{\pi}$$

A dosadíme zase zpět do $y(x)$

$$y(x) = -\frac{2c_1 + 2c_2}{\pi} + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

a nakonec zajistíme pomocí K podmínku $\Phi_K(y) \geq 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} K\left(-c_1 \sin x + c_2 \cos x\right)^2 - \left(-\frac{2c_1 + 2c_2}{\pi} + c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)^2 dx \geq 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Kc_1^2 \sin^2 x - 2Kc_1c_2 \sin x \cos x + Kc_2^2 \cos^2 x - \frac{4c_1^2 + 8c_1c_2 + 4c_2^2}{\pi^2} - c_1^2 \cos^2 x - c_2^2 \sin^2 x +$$
$$+2\frac{2c_1 + 2c_2}{\pi} c_1 \cos x + 2\frac{2c_1 + 2c_2}{\pi} c_2 \sin x - 2c_1 \sin x \cos x dx$$

Roztrhám to na spoustu integrálů a ty rovnou vyčíslím. Na ty složitější použiji substituci jedné trig. funkce (pro ty smíšené) a na tý s druhou mocninou použiji vzorec pro $\sin^2$ případně $\cos^2$.

$$Kc_1^2\frac{\pi}{4} - Kc_1c_2 + Kc_2^2\frac{\pi}{4} - \frac{2c_1^2 + 4c_1c_2 + 2c_2^2}{\pi} - c_1^2\frac{\pi}{4} - c_2^2\frac{\pi}{4} + \frac{4c_1 + 4c_2}{\pi}c_1 + \frac{4c_1 + 4c_2}{\pi}c_2 - c_1 \geq 0$$

$$Kc_1^2\pi^2 - 4\pi Kc_1c_2 + Kc_2^2\pi^2 - 8c_1^2 - 16c_1c_2 - 8c_2^2 - c_1^2\pi^2 - c_2^2\pi^2 + 16c_1^2 + 16c_1c_2 + 16c_1c_2 + 16c_2^2 - 4\pi c_1 \geq 0$$

$$Kc_1^2\pi^2 - 4\pi Kc_1c_2 + Kc_2^2\pi^2 - c_1^2\pi^2 - c_2^2\pi^2 + 8c_1^2 + 16c_1c_2 + 8c_2^2 - 4\pi c_1 \geq 0$$

$$Kc_1^2\pi^2 - 4\pi Kc_1c_2 + Kc_2^2\pi^2 \geq c_1^2\pi^2 + c_2^2\pi^2 - 8c_1^2 - 16c_1c_2 - 8c_2^2 + 4\pi c_1$$

$$K \geq \frac{c_1^2\pi^2 + c_2^2\pi^2 - 8c_1^2 - 16c_1c_2 - 8c_2^2 + 4\pi c_1}{c_1^2\pi^2 - 4\pi c_1c_2 + c_2^2\pi^2} \rightarrow$$

ale jmenovatel je $(c_1\pi - c_2\pi)^2 = \pi^2(c_1 - c_2)$

vohdyž $c_1 = c_2$?

Ačkoliv jde o nerovnici tak nemusíme měnit znaménko, protože vždy platí $\pi\left(c_1^2 + c_2^2\right) \geq 4c_1c_2$, snadno bychom to dokázali například hledáním minima takovéto "funkce", to by bylo v nule. Tímto jsme ukázali, že K musí být pouze větší než nějaká konstanta na pravé straně. Vzhledem k tomu, že si můžeme za K zvolit jakékoliv kladné reálné číslo nebude problém zvolit větší než pravá strana. Pokud by $c_1 = c_2 = 0$ pak bychom už na začátku pracovali s jednoduchou funkcí $y(x) = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{2c_1+2c_2}{\pi} = 0$, pro tu samozřejmě nerovnost platí.

já opravdu nevidím, proč by měl být výraz na pravé straně omezený pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, pak ale nemáme dolní odhad pro K ?