

Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 4

Taylorův polynom, určitý integrál, ODR se separovanými proměnnými

1. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x \sin x}{\ln^4(1+x)},$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

Při výpočtu nepoužívejte l'Hôpitalovo pravidlo ani znalost základních limit.

Řešení:

(i) Uvažujme následující Taylorovy rozvoje v počátku (tj. pro $x \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \\ \ln(1+x) &= x + o(x).\end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x \sin x}{\ln^4(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - 1 + \frac{1}{2}x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{(x + o(x))^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2 \cdot 3!}\right)x^4 + o(x^5)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{24}x^4}{x^4 + o(x^4)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{24}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} = -\frac{1}{24},\end{aligned}$$

kde jsme při výpočtu využili aritmetiku limit.

(ii) Užitím následujících Taylorových rozvoů v počátku (tj. pro $x \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \\ \ln(1+x) &= x + o(x), \\ e^x &= 1 + x + o(x),\end{aligned}$$

postupně dostáváme

$$\begin{aligned}(\cos x)^{\sin x} &= e^{\sin x \ln(\cos x)} = e^{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)} = e^{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} \\ &= e^{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

Po dosazení tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

2. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\ln \frac{1}{x}}{(1+x^2)^2} \right\}$$

kolem osy y .

Řešení: Pro hledaný objem V platí

$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{(1+x^2)^2} dx.$$

Označme si primitivní funkci integrandu

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{x \ln \frac{1}{x}}{(1+x^2)^2} dx,$$

a metodou per partes počítejme (integrační konstanta není důležitá, tak ji nepíšeme)

$$\begin{aligned} F(x) &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln \frac{1}{x} & v = \frac{-1}{2(1+x^2)} \\ u' = -\frac{1}{x} & v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \end{array} \right| = \frac{\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ &= \frac{\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \\ &= \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{x^2 \ln x}{2(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Všimněte si, že v tomto příkladě nelze využít metodu per partes pro Newtonův integrál, neboť pro první výraz za druhým rovnítkem výše platí

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{2(1+x^2)} = -\infty.$$

(Podívejte se na přesné znění příslušné věty.)

Limity primitivní funkce F v krajních bodech vychází následovně

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{x^2 \ln x}{2(1+x^2)} \right) = \frac{1}{4} \ln 2, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{x^2 \ln x}{2(1+x^2)} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0, \end{aligned}$$

kde jsme v předposlední rovnosti využili l'Hôpitalova pravidla pro výpočet limity typu " $\frac{\text{něco}}{\infty}$ ".

Nakonec tedy dostáváme

$$V = 2\pi \left(\lim_{x \rightarrow 1-} F(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} F(x) \right) = 2\pi \left(\frac{1}{4} \ln 2 - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

3. Pro diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x} \sqrt{1-y},$$

nalezněte

- (i) všechna maximální řešení,
- (ii) všechna maximální řešení splňující $y(0) = 1$.

Řešení:

(i) Diferenciální rovnice je ve tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

kde $f(x) = e^{-x}$, $g(y) = 2\sqrt{1-y}$ a můžeme ji tedy řešit metodou separace proměnných. Rovnice má smysl pro x z intervalu $I = \mathbb{R}$. Na celé reálné ose máme stacionární řešení $y \equiv 1$. Zbylá řešení y hledáme z intervalu $J = (-\infty, 1)$, kde je g spojitá a nenulová.

Spočteme primitivní funkce

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(x) dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} - c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$G(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{1}{2\sqrt{1-y}} dy = -\sqrt{1-y}.$$

Z jejich rovnosti

$$\sqrt{1-y} = e^{-x} + c,$$

a nezápornosti levé strany potom dostáváme

- $c \geq 0 \implies x \in \mathbb{R}$,
- $c < 0 \implies x \in (-\infty, -\ln(-c))$.

Všechna maximální řešení tedy jsou

$$y(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = 1 - (e^{-x} + c)^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \geq 0,$$

$$y(x) = \begin{cases} 1 - (e^{-x} + c)^2, & x \in (-\infty, -\ln(-c)), \\ 1, & x \in [-\ln(-c), +\infty), \end{cases} \quad c < 0,$$

kde jsme v posledním případě navíc slepili nalezené řešení se stacionárním.

- (ii) Všimněme si nejdřív, že stacionární řešení $y \equiv 1$ splňuje počáteční podmínku $y(0) = 1$. Dále najdeme hodnotu konstanty c , pro kterou bude i netriviální řešení splňovat počáteční podmínku

$$1 = y(0) = 1 - (1 + c)^2 \implies c = -1.$$

Díky napojování na stacionární řešení pak dostáváme, že i všechna netriviální řešení s $c \leq -1$ splňují počáteční podmínku.

Maximální řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$ tedy jsou

$$y(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1 - (e^{-x} + c)^2, & x \in (-\infty, -\ln(-c)), \\ 1, & x \in [-\ln(-c), +\infty), \end{cases} \quad c \leq -1.$$

