Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	6	5	5	6	7	7	36
Získáno							

[6] 1. a) Přímým derivováním spočtěte Taylorův rozvoj funkce $\arctan x$ v bodě $x_0 = 0$ do čtvrtého řádu, aneb najděte koeficienty $\{a_i\}_{i=0}^4$ tak, aby pro $x \to 0$ platilo $\arctan x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + O(x^5)$.

b) S použitím Taylorova rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(1-x) - \arctan\left(1 - \mathrm{e}^{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x} - x\right)^2}.$$

Řešení:

Víme, že pro rozumnou funkci f platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0} (x-x_0)^n = f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x-x_0)\right|_{x=x_0} + \frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!}\left.\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^4 + \frac{1}{5!}\left.\frac{\mathrm{d}^5 f}{\mathrm{d}x^5}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^5 + \cdots,$$

což nám slouží jako mnemotechnická pomůcka pro vztah mezi koeficienty Taylorova rozvoje a derivacemi funkce f. Jest tedy

$$\arctan x = \left.\arctan x\right|_{x=0} + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x\right|_{x=0} + \frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\arctan x\right|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\arctan x\right|_{x=0} x^3$$
$$+ \frac{1}{4!}\left.\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\arctan x\right|_{x=0} x^4 + O\left(x^5\right).$$

Spočteme potřebné derivace

$$\left.\arctan x\right|_{x=0} = 0,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0} = 1,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\arctan x\right|_{x=0} = -\left.\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right|_{x=0} = 0,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\arctan x\right|_{x=0} = -\left.\frac{2\left(1+x^2\right)^2 - 8x^2\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}\right|_{x=0} = -2,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\arctan x\right|_{x=0} = -\left.\frac{\left(4\left(1+x^2\right)x - 16x\left(1+x^2\right) - 16x^3\right)\left(1+x^2\right)^4 - 8\left(2\left(1+x^2\right)^2 - 8x^2\left(1+x^2\right)\right)\left(1+x^2\right)^3 x}{\left(1+x^2\right)^8}\right|_{x=0} = 0,$$

(Výsledek odpovídá očekávání, liché derivace musí být nulové, neboť $\arctan x$ je lichá funkce. Pokud si tuto skutečnost uvědomíme na začátku výpočtu, vidíme, že se vůbec nemusíme trápit s výpočtem čtvrté derivace, předem totiž víme, že vyjde nulová.) Pro $x \to 0$ tedy platí

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O\left(x^5\right).$$

Můžeme se pustit do výpočtu limity. Provedeme si záměnu proměnné, tak abychom pracovali na okolí bodu nula, kde si pamatujeme Taylorovy rozvoje základních funkcí. Jest tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(1-x) - \arctan\left(1-\mathrm{e}^{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x}-x\right)^2} \overset{y =_{\mathrm{def}} 1-x}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\arctan y - \arctan\left(1-\mathrm{e}^{-y}\right)}{\left(\sqrt{1-y} - (1-y)\right)^2}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\arctan y - \arctan\left(1-\mathrm{e}^{-y}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}y + o(y) - (1-y)\right)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\arctan y - \arctan\left(1-\mathrm{e}^{-y}\right)}{\frac{y^2}{4} + o\left(y^2\right)},$$

kde jsme využili známého vztahu $\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z + o(z)$, který platí pro $z \to 0$. Z uvedeného vyplývá, že se příliš nenadřeme – členy v čitateli stačí rozvinout do řádu $o\left(y^2\right)$. Jest

$$\arctan y = y + o\left(y^2\right)$$

a dále

$$\arctan\left(1 - \mathrm{e}^{-y}\right) = \arctan\left(1 - \left(1 - y + \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right)\right) = \arctan\left(y - \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right) = y - \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right),$$

kde jsme využili výše odvozeného vzorce pro Taylorův rozvoj funkce $\arctan z$ v okolí $z = 0$. Jest tedy

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arctan y - \arctan\left(1 - \mathrm{e}^{-y}\right)}{\frac{y^2}{4} + o\left(y^2\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)}{\frac{y^2}{4} + o\left(y^2\right)} = 2.$$

[5] 2. Najděte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{3} + ay^2} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{3} + ay^2}$$

a určete její hodnotu.

Řešení:

Při výpočtu použijeme známou limitu

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{\sin\xi}{\xi} = 1.$$

(Tato limita je limitou reálné funkce jedné reálné proměnné.) Nejprve vyzkoušíme, pro jaká a je limita ze zadání nezávislá na "přibližování" po přímkách. Zvolme přímku

$$x = s,$$
$$y = ks,$$

kde $k \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo, a $s \in \mathbb{R}$ je parametrizace přímky. Pokud se pohybujeme na vybrané přímce, tak platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{3} + ay^2} = \lim_{s\to 0} \frac{\sin\left(\frac{s^2}{2} + \frac{k^2s^2}{2}\right)}{\frac{s^2}{3} + ak^2s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{\sin\left(\frac{1+k^2}{2}s^2\right)}{\left(\frac{1}{3} + ak^2\right)s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{\sin\left(\frac{1+k^2}{2}s^2\right)}{\frac{1+k^2}{2}s^2} \frac{\frac{1+k^2}{2}}{\frac{1}{3} + ak^2} = \frac{\frac{1+k^2}{2}}{\frac{1}{3} + ak^2}.$$

Výsledek nebude záviset na k pokud zvolíme $a = \frac{1}{3}$. V tomto případě totiž dostaneme

$$\left.\frac{\frac{1+k^2}{2}}{\frac{1}{3} + ak^2}\right|_{a=\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1+k^2}{2}}{\frac{1}{3}\left(1+k^2\right)} = \frac{3}{2}.$$

Zbývá ověřit, že pro takto vybrané a bude existovat limita nejen ve smyslu přibližování po přímkách, ale také jako limita funkce více proměnných. Chceme ukázat, že platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

(Pokud limita existuje, tak její hodnota musí být totožná s limitou po přímkách.) Zavedeme-li v $\mathbb{R}^2$ polární souřadnice, to jest

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

pak původní limita přejde na

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} = \lim_{r\to 0+} \frac{\sin\frac{r^2}{2}}{\frac{r^2}{3}} = \lim_{r\to 0+} \frac{3}{2}\frac{\sin\frac{r^2}{2}}{\frac{r^2}{2}} = \frac{3}{2},$$

kde jsme využili dříve diskutovanou známou limitu reálné funkce jedné reálné proměnné.

[5] 3. Zjistěte, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}.$$

Řešení:

Nejprve prozkoumáme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, což je ovšem snadné. Posloupnost $\sin n$ má omezené částečné součty a posloupnost $\frac{1}{\sqrt{n}}$ je monotónní a konverguje k nule. Podle Dirichletova kritéria je tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ konvergentní. Původní řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}$ je součinem posloupnosti $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, která generuje konvergentní řadu, a monotónní a omezené posloupnosti $\frac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}$. Podle Abelova kritéria je tedy původní řada *konvergentní.* Monotonie a omezenost posloupnosti $\frac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}$ je zřejmá z rozpisu

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}} = 1 - \frac{1}{1+\sqrt[3]{n}}.$$

[6] 4. Najděte obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y = 4x\mathrm{e}^x + \sin x.$$

Řešení:

Rovnice je nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty. Nejprve najdeme řešení homogenní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_{\mathrm{hom}}}{\mathrm{d}x^2} + y_{\mathrm{hom}} = 0,$$

což je snadné,

$$y_{\mathrm{hom}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

(Kořeny charakteristického polynomu jsou $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$.) Zbývá najít partikulární řešení. Pravá strana nehomogenní rovnice je ve tvaru vhodném pro metodu neurčitých koeficientů.

Nejprve najdeme řešení pro nehomogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_{\mathrm{spec},1}}{\mathrm{d}x^2} + y_{\mathrm{spec},1} = 4x\mathrm{e}^x.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y_{\mathrm{spec},1} = (ax+b)\,\mathrm{e}^x$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do rovnice dostaneme

$$2\,(a+b)\,\mathrm{e}^x + 2ax\mathrm{e}^x = 4x\mathrm{e}^x,$$

odkud plyne, že $a = 2$ a $b = -2$. Partikulární řešení je tedy

$$y_{\mathrm{spec},1} = 2\,(x-1)\,\mathrm{e}^x.$$

Dále najdeme řešení pro nehomogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_{\mathrm{spec},2}}{\mathrm{d}x^2} + y_{\mathrm{spec},2} = \sin x.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y_{\mathrm{spec},2} = ax\cos x + bx\sin x$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do rovnice dostaneme

$$2b\cos x - 2a\sin x = \sin x,$$

odkud plyne, že $a = -\frac{1}{2}$ a $b = 0$. Partikulární řešení je tedy

$$y_{\mathrm{spec},2} = -\frac{1}{2} x\cos x.$$

Řešení původní rovnice je součtem řešení homogenní rovnice a přislušných partikulárních řešení,

$$y = y_{\mathrm{hom}} + y_{\mathrm{spec},1} + y_{\mathrm{spec},2} = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} x\cos x + 2\,(x-1)\,\mathrm{e}^x.$$

[7] 5. a) Napište rovnici tečné roviny ke *grafu* funkce $f : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ v bodě

$$\boldsymbol{a} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

přičemž funkce f je dána předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) =_{\mathrm{def}} x^2 + 3y,$$

aneb napište rovnici tečné roviny k ploše S popsané jako $S = \left\{ \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x,y) \right\}$.

b) Uvažujte stejnou funkci f, to jest

$$f(\boldsymbol{x}) =_{\mathrm{def}} x^2 + 3y,$$

a najděte bod, ve kterém tato funkce nabývá minima na množině

$$M = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \right\}.$$

Řešení:

Rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ v bodě

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

lze s pomocí totálního diferenciálu zapsat jako

$$z = \left. f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \left. \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} \left[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} \right],$$

kde jsme označili

$$\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

(Připomeňte si, že z definice totálního diferenciálu víme, že $\left. f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \left. \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} \left[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} \right]$ je nejlepší lineární aproximace funkce $f(\boldsymbol{x})$ na okolí bodu $\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}$.) Případně lze použít gradient

$$z = \left. f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \left. \nabla f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} \bullet \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2} \right).$$

Rozepíšeme-li obě jmenované rovnice, dostaneme

$$z = \left. f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} + \left. \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} (x - a_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_{\mathbb{R}^2}} (y - a_2).$$

Spočteme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = 3,$$

a po dosazení dostaneme

$$z = 4 + 2(x-1) + 3(y-1),$$

což je hledaná rovnice tečné roviny.

Zabývejme se druhou částí úlohy. Víme, že bod, ve kterém funkce nabývá minima bude ležet buď uvnitř množiny M nebo na její hranici. Nejdříve vyšetříme, podmínku na extrémy uvnitř M. Hledáme tedy body $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}$, kde vymizí gradient, aneb potřebujeme vyřešit rovnici

$$\left. \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} = \boldsymbol{0}.$$

Rutinní výpočet dává

$$\left. \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. 2x \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} \\ \left. 3 \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} \end{bmatrix}.$$

Bod $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}$ podezřelý z extrému tedy musí řešit rovnici

$$\begin{bmatrix} 2x_{\mathrm{ext}} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tato soustava rovnic zjevně nemá řešení a uvnitř množiny M se nenachází žádný bod podezřelý z extrému. Nezbývá tedy, než hledat minimum na hranici množiny M. To provedeme pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Hledáme totiž extrém funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině ∂M, což je množina popsaná rovnicí (vazbou) $g(\boldsymbol{x}) = 0$, kde

$$g(\boldsymbol{x}) =_{\mathrm{def}} x^2 + (y-1)^2 - 1.$$

Sestavíme si pomocnou funkci

$$f_\lambda(\boldsymbol{x}) =_{\mathrm{def}} f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x}),$$

což v našem případě vede na

$$f_\lambda(\boldsymbol{x}) =_{\mathrm{def}} x^2 + 3y - \lambda\left(x^2 + (y-1)^2 - 1\right).$$

Podmínka na extrém je

$$\left.\nabla_{\boldsymbol{x}} f_\lambda(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} = \boldsymbol{0},$$

přičemž bod $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}$ musí samozřejmě splňovat $g(\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}) = 0$. Spočteme si gradient pomocné funkce

$$\left.\nabla_{\boldsymbol{x}} f_\lambda(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} \\ \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(f(\boldsymbol{x}) - \lambda g(\boldsymbol{x})\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{\mathrm{ext}} - 2\lambda x_{\mathrm{ext}} \\ 3 - 2\lambda\left(y_{\mathrm{ext}} - 1\right) \end{bmatrix}.$$

Podmínka $\left.\nabla_{\boldsymbol{x}} f_\lambda(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}} = \boldsymbol{0}$ spolu s vazbou $g(\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}) = 0$ tedy vede na následující systém tří algebraických rovnic pro bod polohu body podezřelého z extrému $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}$ a Lagrangeův multiplikátor λ,

$$\begin{aligned} 2x_{\mathrm{ext}} - 2\lambda x_{\mathrm{ext}} &= 0, \\ 3 - 2\lambda\left(y_{\mathrm{ext}} - 1\right) &= 0, \\ x_{\mathrm{ext}}^2 + \left(y_{\mathrm{ext}} - 1\right)^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Při řešení systému je výhodné začít eliminací Lagrangeova multiplikátoru. Vynásobíme-li první rovnici $(y_{\mathrm{ext}} - 1)$ a odečteme-li od ní druhou rovnice přenásobenou x_{ext}, dostaneme rovnici

$$2x_{\mathrm{ext}}\left(y_{\mathrm{ext}} - 1\right) - 3x_{\mathrm{ext}} = 0.$$

Řešíme tedy nyní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_{\mathrm{ext}}\left(y_{\mathrm{ext}} - 1\right) - 3x_{\mathrm{ext}} &= 0, \\ x_{\mathrm{ext}}^2 + \left(y_{\mathrm{ext}} - 1\right)^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

pro bod $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext}}$. Z první rovnice plyne, že $x_{\mathrm{ext}}\left(2\left(y_{\mathrm{ext}} - 1\right) - 3\right) = 0$, z čehož usoudíme, že buď

$$x_{\mathrm{ext}} = 0,$$

nebo

$$y_{\mathrm{ext}} = \frac{5}{2}.$$

Je-li $x_{\mathrm{ext}} = 0$, pak si z rovnice pro vazbu přečteme, že odpovídající y_{ext} řeší rovnici $(y_{\mathrm{ext}} - 1)^2 - 1 = 0$, což znamená, že body podezřelé z extrému jsou

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vraťme se nyní zpět a zkoumejme variantu s $y_{\mathrm{ext}} = \frac{5}{2}$. Z rovnice pro vazbu si přečteme, že odpovídající x_{ext} řeší rovnici $x_{\mathrm{ext}}^2 + (\frac{3}{2})^2 - 1 = 0$. Tato rovnice zjevně nemá řešení, a proto nám již nepřibyde žádný bod podezřelý z extrému.

Zbývá rozhodnout, který z nalezených bodů $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},1}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},2}$ je bodem, ve kterém funkce nabývá minima. Nezatěžujeme se výpočtem matice druhých derivací, neboť situace je v tomto případě jasná. Dosadíme-li si do funkce f, dostaneme $f(\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},1}) = 0$, zatímco $f(\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},2}) = 6$, a funkce f proto nabývá minima v bodě $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},1}$.

Při výpočtu se lze případně obejít i bez Lagrangeova multiplikátoru. Množina vymezená předpisem $g(x) = 0$ je kružnice se středem v bodě $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$, a tuto křivku dokážeme snadno parametrizovat, jest

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi, \\ y &= 1 + \sin\varphi, \end{aligned}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Pohybujeme-li se tedy po kružnici, abem měníme-li φ, pak funkce $f(\boldsymbol{x})$ nabývá hodnot

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\varphi) = \cos^2 \varphi + 3\,(1 + \sin \varphi)\,,$$

a úlohu jsme tedy převedli na hledání extrému reálné funkce *jedné* reálné proměnné. Najít extrém reální funkce reální proměnné je snadné, hledáme φ tak, aby platilo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi} = 0,$$

což znamená, že potřebujeme vyřešit rovnici

$$-2\cos\varphi_{\mathrm{ext}} \sin\varphi_{\mathrm{ext}} + 3\cos\varphi_{\mathrm{ext}} = 0,$$

odkud plyne, že je nutné zvoli $\cos\varphi_{\mathrm{ext}} = 0$. To nastane v případě $\varphi_{\mathrm{ext}} = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi_{\mathrm{ext}} = \frac{3}{2}\pi$. Odpovídající body v $\mathbb{R}^2$ dostaneme dosazením do předpisu pro parametrizaci kružnice. Body podezřelé z extrému jsou tedy

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{\mathrm{ext},1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Což je kupodivu totéž jako v případě, kdy jsme provedli výpočet za použítí Lagrangeova multiplikátoru.

[7] 6. Uvažujte funkce $y_1(x_1, x_2)$ a $y_2(x_1, x_2)$, které jsou jakožto funkce proměnných x_1 a x_2, zadány implicitně soustavou rovnic

$$x_1 \mathrm{e}^{y_2} + y_1 \ln x_2 - \mathrm{e} = 0,$$
$$x_1 y_1 + x_2 \mathrm{e}^{y_2} - (2 + \mathrm{e}) = 0.$$

Vypočtěte $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$ v bodě $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$. (Pro úplnost zdůrazňuji, že řešením úlohy jsou dvě čísla – číslené hodnoty derivací $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$ v příslušném bodě.)

Řešení:

K zodpovězení otázky použijeme větu o implicitních funkcích. Označme si

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

a dále

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$$

a konečně

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \mathrm{e}^{y_2} + y_1 \ln x_2 - \mathrm{e} \\ x_1 y_1 + x_2 \mathrm{e}^{y_2} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix}.$$

Nejprve najdeme bod $\boldsymbol{y}_0$, který společně s $\boldsymbol{x}_0$ řeší rovnici

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0},$$

aneb chceme, aby platilo

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \mathrm{e}^{y_2^0} + y_1^0 \ln x_2^0 - \mathrm{e} \\ x_1^0 y_1^0 + x_2^0 \mathrm{e}^{y_2^0} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což po dosazení za $\boldsymbol{x}_0$ vede na soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{y_2^0} - \mathrm{e} \\ y_1^0 + \mathrm{e}^{y_2^0} - (2 + \mathrm{e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což dává

$$\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Připomeneme si formální výpočet dle věty o implicitních funkcích. Je-li $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$, pak

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0},$$

odkud

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}},$$

přičemž jsme použili značení

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

V našem konkrétním případě dostaneme

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{y_2} & \frac{y_1}{x_2} \\ y_1 & \mathrm{e}^{y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \ln x_2 & x_1 \mathrm{e}^{y_2} \\ x_1 & x_2 \mathrm{e}^{y_2} \end{bmatrix}.$$

Zajímají nás hodnoty v bodě $\boldsymbol{x}_0$. (Připomeňme si, že $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$.) Po dosazení dostaneme

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 2 \\ 2 & \mathrm{e} \end{bmatrix}, \qquad \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e} \\ 1 & \mathrm{e} \end{bmatrix}, \qquad \left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{1}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} \mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Připomeňme si, že inverzi matice 2×2 lze spočíst pouhým pohledem, je-li $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertibilní matice, pak je $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. (Příslušná říkanka zní "zaměň prvky na diagonále, u prvků mimo diagonálu změň znaménko, a pak všechno vyděl determinantem".) Požadované derivace najdeme dosazením do vztahu

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

což dává

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \frac{1}{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} \mathrm{e} & -\mathrm{e} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 2 \\ 2 & \mathrm{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e} - 2 & 2 - \mathrm{e} \\ -1 & -\frac{2}{\mathrm{e}} \end{bmatrix}$$

a proto

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \mathrm{e} - 2,$$

$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -1.$$