Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	10	10	10	36
Získáno					

[6] 1. Budiž dána funkce

$$h(z) =_{\mathrm{def}} \frac{z}{(z-1)(z+2)}.$$

V bodě $z_0 = \infty$ (máme samozřejmě na mysli standardně zavedené nekonečno v komplexních číslech):

a) najděte Laurentovu řadu funkce $h(z)$,

b) spočtěte reziduum,

c) určete typ singularity.

Spočtěte residuum ve zbývajících singularitách funkce $h(z)$ a ověřte, že součet všech residuí (to jest včetně residua v nekonečnu) je roven nule.

[10] 2. Pomocí integrace vhodné komplexní funkce přes křivku v komplexní rovině spočtěte integrál

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3\cos x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

[10] 3. Buď $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ daná funkce, $y \in \mathbb{R}$ dané reálné číslo a $k \in \mathbb{N}$ dané přirozené číslo. (Pro účely tohoto příkladu upřesňujeme, že přirozená čísla chápeme *včetně nuly*.) Pro libovolné $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definujeme distribuci $T_n^{y,k}$ jako

$$\left\langle T_n^{y,k}, \varphi \right\rangle =_{\mathrm{def}} \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g\left(y+x\right) - 2g(y) + g\left(y-x\right) \right] \varphi\left(\frac{x+y}{n^k} \right) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

a) Ukažte, že definicí (1) je skutečně pro libovolné pevné n zavedena distribuce (korektnost definice, linearita, spojitost).

b) Ukažte, že posloupnost distribucí $\left\{ T_n^{y,k} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ je pro dané pevné $y \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$ a pro danou pevnou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ konvergentní ve smyslu distribucí. Určete limitní distribuci, to jest najděte $\lim_{n\to+\infty} T_n^{y,k}$.

[10] 4. Označme si $\chi_{[-1,1]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ charakteristickou funkci intevalu $[-1,1]$, to jest

$$\chi_{[-1,1]} =_{\text{def}} \begin{cases} 1, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

a) Podle definice spočtěte $\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}$. (Než začnete počítat, nakreslete si obrázek!)

b) Spočtěte Fourierovu transformaci $\chi_{[-1,1]}$, to jest spočtěte

$$\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]}\right].$$

c) Spočtěte inverzní Fourierovu transformaci funkce $\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2$, to jest spočtěte

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2\right].$$

(Proměnnou ve Fourierově prostoru značíme ξ.) Při výpočtu lze výhodně využít výsledků z předchozích bodů.