NOFY161, ZS 2020-2021 Teoretická část zkouškové písemné práce 22. ledna 2021

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Body	6	6	6	6	24
Získáno					

[6] 1. Nechť $\Phi : X \to \mathbb{R}$, kde $X := C([a,b])$.

1. Zadefinujte diferenciál Gateaux $\delta\Phi[y_0]$ pro dané, ale libovolné $y_0 \in X$.
2. Zadefinujte Frechetův diferenciál $d\Phi(y_0)$ respektive $\Phi'(y_0)$ pro dané (libovolné) $y_0 \in X$.
3. Ukažte, že z existence Frechetova diferenciálu plyne existence diferenciálu Gateaux.
4. Buď $f \in C([a,b])$. Ukažte, že funkcionál Φ definovaný předpisem $\Phi[y_0] := \int_a^b f(x)y_0(x)\,dx$ je lineární na X. Určete $\delta\Phi[y_0]$ a $d\Phi(y_0)$.

[6] 2. Uvažujte posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaných na intervalu $(0,1)$, které jsou *stejně omezené*.

0. uveďte definici *stejně omezené* posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Zadefinujte tyto pojmy

1. $f_n \to f_0$ v $L^2(0,1) \quad (n \to \infty)$,
2. $f_n \to f_0$ v $L^\infty(0,1) \quad (n \to \infty)$,
3. $f_n \to f_0$ stejnoměrně na $(0,1) \quad (n \to \infty)$,
4. $f_n \to f_0$ skoro všude v $(0,1) \quad (n \to \infty)$.

Rozhodněte, zda pro výše uvedenou posloupnost *stejně omezených* funkcí platí implikace 1. $\implies$ 2., 1. $\implies$ 3., 1. $\implies$ 4., 2. $\implies$ 1.,.... (celkem 12 implikací). Stručně odůvodněte.

[6] 3.

1. Zadefinujte křivkový integrál druhého druhu $\int_{\langle\phi\rangle} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds}$ včetně přesných předpokladů na uvažovanou křivku $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}^d$.
2. Zformulujte větu o potenciálu, která se týka křivkového integrálu druhého druhu a dokažte ji.
3. Pokud $\mathbf{f}$ splňuje předpoklady věty o potenciálu, určete, za jakých dalších předpokladů na <u>křivku ϕ</u> je $\int_{\langle\phi\rangle} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds} = 0$?
4. Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha s hranicí ∂S popsanou (uzavřenou) křivkou $\langle\phi\rangle$. Pak platí

$$\int_{\langle\phi\rangle} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds} = \int_{\partial S} \mathbf{f}\cdot\mathbf{ds} = \int_S \ldots$$

   Doplňte vzorec a zadefinujte diferenciální operátor, který se ve vzorci vyskytuje.

[6] 4. Zadefinujte tyto pojmy:

1. H je separabilní Hilbertův prostor,
2. $\{\omega_r\}_{r=1}^{\infty}$ je úplný spočetný ortonormální systém v H,
3. prostor malé l2, značený $\left(\ell^2, (\cdot, \cdot)_{\ell^2}\right)$.
4. prostor velké l2, značený $\left(L^2(\Omega), (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}\right)$

Zformulujte a dokažte následující nerovnosti:

1. Besselova nerovnost v H.
2. Hölderovu nerovnost pro funkce z $L^2(\Omega)$.
3. Minkowského nerovnost pro funkce z $L^2(\Omega)$.