Úkol 2

Příklad 1
Pro všechny funkce $y = y(x)$ patřící do prostoru $C^1([1, 3])$ a splňující okrajové podmínky $y(1) = 1$, $y(3) = 4$ uvažuj funkcionál

$$\Phi(y) = \int_1^3 \left(2y - yy' + x(y')^2\right) \, \mathrm{d}x.$$

Najdi extremálu tohoto funkcionálu a urči, zda se jedná o minimizér, maximizér, nebo ani jedno.

Příklad 2
Pro všechny funkce $y = y(x)$ patřící do prostoru $C^1([0, \pi])$ a splňující okrajové podmínky $y(0) = 9$, $y(\pi) = 9e^{\pi}$ uvažuj funkcionál

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi} \left((y')^2 - \frac{25}{9}y^2 + 68e^x y\right) \, \mathrm{d}x.$$

Najdi extremálu tohoto funkcionálu a urči, zda se jedná o minimizér, maximizér, nebo ani jedno.

Příklad 3
V teorii parciálních diferenciálních rovnic (rovnice vedení tepla, vlnové rovnice, aj.) se často používá tzv. Poincarého nerovnost zajišťující odhad hodnot funkce pomocí hodnot jejích derivací.

Metodami variačního počtu ukaž, že v jedné prostorové dimenzi jsou splněny následující varianty Poincarého nerovnosti

- Pro všechny funkce $y = y(x)$ z prostoru $C_0^1([0, \frac{\pi}{2}])$ platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y')^2 \, \mathrm{d}x.$$

- Existuje konstanta $K \in (0, \infty)$ taková, že pro všechny funkce $y = y(x)$ z prostoru $C^1([0, \frac{\pi}{2}])$ splňující $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \, \mathrm{d}x = 0$ platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \, \mathrm{d}x \leq K \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y')^2 \, \mathrm{d}x.$$

Nápověda k Příkladu 3:

- V prvním případě hledej minimizér funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y')^2 - y^2 \,\mathrm{d}x$$

mezi funkcemi splňujícími $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

- Ve druhém případě označ pro $K \in (0, \infty)$

$$\Phi_K(y) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(y')^2 - y^2 \,\mathrm{d}x.$$

Užitím Věty o Lagrangeových multiplikátorech pro vázané extrémy funkcionálů hledej všechny minimizéry funkcionálu $\Phi_1 = \Phi_1(y)$ mezi funkcemi splňujícími $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \,\mathrm{d}x = 0$. Najdi dostatečně velké K takové, aby $\Phi_K(y) \geq 0$ pro všechny zmíněné minimizéry funkcionálu Φ_1, tedy i pro všechna $y \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])$ splňující $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \,\mathrm{d}x = 0$.