NMAF062, LS 2017-2018 Teoretická část zkouškové písemné práce 24. května 2018

Jméno a příjmení: ______________________________

Jméno cvičícího: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Body	7	5	8	20
Získáno				

[7] 1. (a) Zformulujte Cauchyho větu a všechny pojmy v jejím znění zadefinujte.
(b) Buď f holomorfní na kruhu $B_R(a)$. Ukažte, že pak pro $w \in B_\rho(a)$, kde $\rho \in (0, R)$ libovolné, platí:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz\,.$$

(c) Zformulujte větu o jednoznačnosti pro holomorfní funkce. Naznačte její důkaz a uveďte jednu aplikaci této věty.

[5] 2. Zadefinujte přesně Lebesgueův prostor $L^1(\Omega)$ pro vhodnou (jakou?) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Ukažte, že tento prostor je normovaný lineární prostor. Je $L^1(\Omega)$ úplný? Jaký je rozdíl/vztah mezi $L^1(\Omega)$ a $L^2(\Omega)$?

[8] 3. Nechť $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty$ je úplný ortonormální systém v $L^2(\Omega)$.

- Uveďte definice pojmů *úplný ortonormální systém* $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty$ *v* $L^2(\Omega)$.
- Buď $f \in L^2(\Omega)$. Minimalizací funkcionálu $\Phi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$\Phi[\alpha] = \Phi[(\alpha_1, \ldots, \alpha_M)] := \|f - \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \Phi_k\|^2_{L^2(\Omega)}\,,$$

  určete $c = (c_1, \ldots, c_M)$, pro která Φ minima nabývá.
- Definujte projekci $P_M : L^2(\Omega) \to \operatorname{span}\{\Phi_1, \ldots, \Phi_M\}$ definovanou vztahem

$$P_M f = \sum_{k=1}^{M} c_k \Phi_k\,,$$

  kde $(c_1, \ldots, c_M)$ jsou dána minimalizací z předchozího kroku. Ukažte, že platí
  1. $\|f - P_M f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|P_M f\|^2_{L^2(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$;
  2. $(f - P_M f, y)_{L^2(\Omega)} = 0$ pro každé $y \in \operatorname{span}\{\Phi_1, \ldots, \Phi_M\}$.
- Rozhodněte, zda platí:

$$P_M f \to f \text{ v } L^2(\Omega) \text{ pro } M \to \infty \text{ a pro každé } f \in L^2(\Omega).$$

  Není třeba dokazovat, ale je třeba Váš názor podpořit. Co lze říci o bodové konvergenci $P_M f$?