NOFY162, LS 2020-2021 Teoretická část zkouškové písemné práce 1. července 2021

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	**Celkem bodů**
Body	12	12	24
Získáno			

[12] 1. Pro f spojitou v $\mathbb{C}$:

(a) Zadefinujte komplexní křivkový integrál a zformulujte a dokažte základní dohad, který komplexní křivkový integrál splňuje.

(b) Odvoďte vztah mezi komplexním křivkovým integrálem pro $f = f_1 + if_2$ a křivkovými integrály druhého druhu pro vhodná vektorová pole.

Pro f holomorfní v $\mathbb{C}$:

(c) Zformulujte Cauchyho-Goursatovu větu a dokažte ji.

(d) Ukažte, že pak pro $w \in B_\rho(a)$, kde $\rho > 0$ je libovolné, platí:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(z)}{z - w} \, dz \,.$$

(e) Zformulujte větu o hladkosti pro holomorfní funkce. Uveďte hlavní myšlenku důkazu.

(f) Co lze říci o konvergenci a tvaru mocninné řady funkce f (se středem v nule). Ukažte, jak lze různými způsoby popsat koeficienty této řady.

[12] 2. (a) Uveďte definici Schwartzova prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a jeho duálu, tj. prostoru temperovaných distribucí $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Ukažte, že tyto prostory jsou lineární (vektorové) prostory.
(b) Rozhodněte a odůvodněte zda tyto funkce patří do $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

- $f_1(x) = \frac{1}{1+|x|^4}$
- $f_2(x) = \exp(-|x-3|^4)$
- $f_3(x) = \exp(-|x|)$

Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}\varphi(x)\,dx$ patří do $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Odůvodněte.
(c) Vysvětlete, jak porozumět inkluzi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (a proč tato inkluze platí).
(d) Zaveďte Fourierovu transformaci na obou těchto prostorech. Odůvodněte (motivujte) definici Fourierovy transformace na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
(e) Uveďte formulaci inverzního Fourierova vzorce a rozhodněte, zda tento vzorec na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ respektive na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ platí. V kladném případě vzorec dokažte (stačí vysvětlit ideu důkazu).