1

1.1 Zadání

Buďte $a,b \in \mathbb{R}$. Nechť $f(x) = ax$ pro $x \in (-\pi,0)$, $f(x) = bx$ pro $x \in (0,\pi)$.

- Najděte Fourierovu řadu funkce f na intervalu $(-\pi,\pi)$.
- Rozšiřte funkci na celé $\mathbb{R}$ tak, aby se tvar její Fourierovy řady nezměnil.
- Vyšetřete bodovou konvergenci řady - bodovou, stejnoměrnou a v $L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

1.2 Řešení

Fonkci můžeme nejprve spojitě dodefinovat v bodě $x = 0$ hodnotou $f(0) = 0$. Její derivace v tomto bodě spojitá není (kromě speciálního případu $a = b$), avšak platí $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = a$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = b$. Nyní můžu začít s výpočtem jednotlivých koeficientů. Pro přehlednost označím koeficienty u cosinů c_k a u sinů s_k, tedy

$$f \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos(kx) + s_k \sin(kx)\right)$$

Pak pro jednotlivé koeficienty platí

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N}_0\,, \\ s_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Pro $k = 0$ dostaneme

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} bx\ \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{a}{2}x^2\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{b}{2}x^2\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{\pi(b-a)}{2}\,.$$

Pro ostatní cosinové koeficienty je situace o něco složitější, nicméně integrál je možné vyřešit pomocí per partes a znalosti derivace funkce f ($f'(x) = a$, $x \in (-\pi,0)$, $f'(x) = b$, $x \in (0,\pi)$):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = f(x) & v' = \cos(kx) \\ u' = f'(x) & v = \frac{1}{k}\sin(kx) \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{k}f(x)\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{k}f'(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x\right) = \\ &= \begin{vmatrix} \left[\frac{1}{k}f(x)\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \text{protože} \sin(k\pi) = 0\ \forall k \in \mathbb{Z} \end{vmatrix} = \frac{-1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\frac{a}{k}\sin(kx)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\frac{b}{k}\sin(kx)\ \mathrm{d}x\right) = \frac{-1}{\pi k}\left(\left[-\frac{a}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{b}{k}\cos(kx)\right]_{0}^{\pi}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \cos(k\pi) = (-1)^k\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos(-x) = \cos(x) \end{vmatrix} = \frac{-1}{k^2\pi}\left(-a + a(-1)^k - b(-1)^k + b\right) = \begin{Bmatrix} \frac{2(a-b)}{k^2\pi} & k\ liche' \\ 0 & k\ sude' \end{Bmatrix}\,. \end{aligned}$$

Pro sinové koeficienty probíhá výpočet obdobně:

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = f(x) & v' = \sin(kx) \\ u' = f'(x) & v = -\frac{1}{k}\cos(kx) \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{k}f(x)\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^k(a+b)}{k} + \int_{-\pi}^{0}\frac{a}{k}\cos(kx)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\frac{b}{k}\cos(kx)\ \mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(a+b)}{k} + \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{a}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{b}{k^2}\sin(kx)\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{(-1)^{k-1}(a+b)}{k} \end{aligned}$$

Celou abstraktní Fourierovu řadu tak můžu zapsat jako

$$f(x) \sim \frac{\pi(b-a)}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\,(a-b)}{(2k-1)^2\pi}\cos((2k-1)x) + \frac{(a+b)(-1)^{k-1}}{k}\sin(kx)\right)\,.$$

Je zajímavé si povšimnout, že pro $a = b$, kdy je f lichá, zmizí členy s cosinem (neboť jsou závislé na $(a-b)$) a naopak pro $a = -b$, kdy je f sudá, vymizí členy se sinem (neboť jsou závislé na $(a+b)$), což je přesně to co bychom od Fourierovy řady očekávali.

Aby se tvar Fourierovy řady nezměnil, musela by f být na celém $\mathbb{R}$ periodická s periodou 2π. Toho dosáhneme jednoduše tak, že na každém intervalu $((2n-1)\pi,(2n+1)\pi)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ její funkční hodnotu zadefinujeme jako $f(x) = f(x-2n\pi)$, kde $(x-2n\pi)$ se již nachází v původním intervalu $(-\pi,\pi)$. Pro speciální volbu parametrů $-a = b$ je funkci možno spojitě dodefinovat i v bodech $x = (2n+1)\pi$, a to hodnotou $f((2n+1)\pi) = b\pi$. Pro jiné případy je $\lim\limits_{x\to(2n+1)\pi^-} f(x) = b\pi$, $\lim\limits_{x\to(2n+1)\pi^+} f(x) = -a\pi$, je tedy nespojitá a nemůžeme ji ani nijak spojitě dodefinovat.

K vyšetření konvergence využiju větu 7.8. Rozšířená funkce je po částech spojitá na intervalech $x \in ((2n-1)\pi,(2n+1)\pi)$ (pokud dodefinuju $f(2n\pi) = 0$) a po částech spojitě diferencovatelná na intervalech $x \in (n\pi,(n+1)\pi)$. Pak tedy

$$s_n^f \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

což v tomto konkrétním případě dává

$$s_n^f \to \left\{\begin{matrix} f(x) & x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (n\pi,(n+1)\pi) \\ 0 & x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{b-a}{2} & x = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\}$$

S výjimkou bodů nespojitosti tak fourierova řada bodově konverguje k $f(x)$. Nekonverguje stejnoměrně (plyne přímo z nespojitosti), avšak konverguje lokálně stejnosměrně na libovolném intervalu $((2n-1)\pi,(2n+1)\pi)$. Výjimkou je speciální volba parametrů $-a = b$, kdy je funkci možno spojitě rozšířit na celé $\mathbb{R}$ (jako v předchozím odstavci). Pak jsou splněny podmínky věty 7.7 (funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, je po částech spojitě diferencovatelná a limity derivací v bodech nespojitosti jsou vlastní - pro nulu jsou ukázány na začátku, $\lim\limits_{x\to-\pi^+} f'(x) = a$, $\lim\limits_{x\to\pi^-} f'(x) = b$) a Fourierova řada tak k $f(x)$ konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$.

2

2.1 Zadání

- Nechť $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Které koeficienty Fourierova rozvoje funkce f se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x+\pi) = -f(x)$.
- Jak se prodlouží funkce $f \in L^2\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ na interval $(-\pi,\pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$?

2.2 Řešení

- Podmínka $f(x) = f(-x)$ říká, že funkce f je sudá, tudíž její rozklad může obsahovat pouze členy závislé na kosinu, tedy $s_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Pro druhou podmínku tak uvažuji pouze $f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kx)$. Musí platit $f(x+\pi) = -f(x)$, tedy

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k(x+\pi)) = -\frac{c_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kx)\,. \tag{1}$$

  Má-li rovnost platit $\forall x$, musí být $\frac{c_0}{2} = 0$ (neboť $\frac{c_0}{2} = -\frac{c_0}{2}$). Dále můžu využít toho že perioda kosinu je 2π a $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ (neboť $\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$), a tedy $\cos(n(x+\pi)) = \cos(nx+n\pi)$ je roven $\cos(x)$ pro n sudé a $-\cos(x)$ pro n liché. Na levé straně tak dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k(x+\pi)) = \sum_{k=1}^{\infty} -c_{(2k-1)} \cos((2k-1)x) + c_{2k}\cos(2kx)$$

  Má-li tak rovnost (1) platit, musí být pro všechny n: $-c_{(2n-1)} = -c_{(2n-1)}$, což je identita, nicméně zároveň musí $c_{2n} = -c_{2n}$ a tedy $c_{2n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Neanulované tak zůstanou pouze liché (nenulové) koeficienty kosinů, tedy

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} \cos((2k-1)x)\,.$$

- V Fourierově rozkladu se vyskytují pouze členy s kosinem, rozšířená funkce tak musí být sudá, tj. $f(x) = f(-x)$. Dále je z Fourierova rozkladu vidět, že funkce je periodická s periodou π (v argumentu kosinu je $2nx$, perioda je dána neznámou l, přepíšeme-li argument na $\frac{2\pi n}{l}x$, zde na první pohled $l = \pi$). Proto $f(x) = f(x + \pi)$. Rozšíření funkce (které označím F) na interval $(-\pi,\pi)$ tak můžu zavést jako

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cc} f(x) & x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ f(-x) & x \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right) \\ f(x+\pi) & x \in \left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right) \\ f(\pi - x) & x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{array} \right\}$$

3

3.1 Zadání

Spočtěte sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}\,.$$

(Můžete použít výsledky $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$).

3.2 Řešení

K výpočtu nekonečné sumy mi poslouží Fourierova řada funkce $f(x) = x^6$ na intervalu $[-\pi,\pi]$. Funkce je sudá, koeficienty sinů tak musí být rovny nule. Zbývá tak vypočítat koeficienty cosinů. Ty jsou obecně

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^6 \cos(nx)\, \mathrm{d}x\,.$$

Budu muset šestkrát aplikovat per partes, a to vždy tak, že derivovaná funkce bude ve tvaru $\frac{kx^\alpha}{n^(6-\alpha)}$, po derivaci $\frac{\alpha k x^{\alpha-1}}{n^(6-\alpha)}$, a integrovaná bude buď $\cos(nx)$ (pak $\int \cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sin(nx)$) nebo $\sin(nx)$ (pak $\int \sin(nx) = -\frac{1}{n}\cos(nx)$). Dále nebudu použití per partes zdůrazňovat. Koeficienty u cosinů tak jsou

$$c_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^6}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{6x^5}{n}\sin(nx)\, \mathrm{d}x$$

Platí $\sin(n\pi) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$, hranatá závorka tak bude rovna nule. Pokračuji tak jako

$$c_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{6x^5}{n^2}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{30x^4}{n^2}\cos(nx)\, \mathrm{d}x$$

Tentokrát se hranatá závorka nevynuluje, nicméně platí $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n\ \forall n \in \mathbb{Z}$, hodnota hranaté závorky tak je $\left[\frac{6x^5}{n^2}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{12\pi^5}{n^2}(-1)^n$. Dále tak mám

$$c_n = \frac{12\pi^4}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{\pi}\left[\frac{30x^4}{n^3}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{120x^3}{n^3}\sin(nx)\, \mathrm{d}x$$

Hranatá závorka se díky sinu opět vynuluje. Opět provedu per partes, mám

$$c_n = \frac{12\pi^4}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{\pi}\left[\frac{120x^3}{n^4}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{360x^2}{n^4}\cos(nx)\, \mathrm{d}x$$

Opět využiju $\cos(nx) = (-1)^n$, hodnota hranaté závorky tak je $\left[\frac{120x^3}{n^4}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{240\pi^3}{n^4}(-1)^n$. Pokračuji, mám

$$c_n = \frac{12\pi^4}{n^2}(-1)^n - \frac{240\pi^2}{n^4}(-1)^n + \frac{1}{\pi}\left[\frac{360x^2}{n^5}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{720x}{n^5}\sin(nx)\, \mathrm{d}x$$

Hranatá závorka se opět vynuluje a pomocí posledního per partes dostanu

$$c_n = \frac{12\pi^4}{n^2}(-1)^n - \frac{240\pi^2}{n^4}(-1)^n + \frac{1}{\pi}\left[\frac{720x}{n^6}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{720}{n^6}\cos(nx)\, \mathrm{d}x$$

Poslední integrál je roven nule (kosinus je sudý a intervaly jsou symetricky kolem nuly, lze nahlédnout i tak že po integrálu bych dostal sinus v hranatých závorkách, který by se z dříve uvedených důvodů vynuloval), hranatá závorka je (stejným postupem jako dříve) rovna $\left[\frac{720x}{n^6}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1440\pi}{n^6}(-1)^n$. Dohromady tak

$$c_n = \frac{12\pi^5}{n^2}(-1)^n - \frac{240\pi^3}{n^4}(-1)^n + \frac{1440}{n^6}(-1)^n \,.$$

Nakonec vypočítám nultý koeficient jako

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6 \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi^6}{7}\,.$$

Protože funkce $f(x)$ je $C(\mathbb{R})$ (rozšíříme-li ji tak aby byla periodická, tj. $f(x+2k\pi) = f(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$) a na intervalech má spojité první derivace, Fourierova řada k ní (bodově i stejnoměrně) konverguje. Platí tedy

$$x^6 = \frac{\pi^6}{7} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6}\right)(-1)^n\cos(nx)\,.$$

Speciálně, dosadím-li $x = \pi$, přejde $\cos(nx) = (-1)^n$, což vynásobeno druhým $(-1)^n$ dá 1. Mám tak

$$\pi^6 = \frac{\pi^6}{7} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6}\,.$$

Nyní využiju znalost $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, což po dosazení dá

$$\pi^6 = \frac{\pi^6}{7} + 12\pi^4\frac{\pi^2}{6} - 240\pi^2\frac{\pi^4}{90} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1440}{n^6}\,,$$

$$\pi^6 = \frac{\pi^6}{7} + 2\pi^6 - \frac{8\pi^6}{3} + 1440\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\,,$$

odkud již konečně

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}\,.$$