

Jméno a příjmení: _____

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

- [8] 1.
- Uveďte metrickou definici (=definici založenou na pojmu konvergence) kompaktní množiny $K \subset \mathbb{R}^d$.
 - Dokažte, vycházejte z této definice a pojmu spojitosti funkce, že platí: *Obraz kompaktní množiny při spojitém zobrazení je kompaktní množina.*
 - Jaké další vlastnosti platí pro spojitě funkce na kompaktních množinách v $\mathbb{R}^d$? Vlastnosti zadefinujte, tvrzení nedokazujte.
 - Zadefinujte prostor ℓ^2 a shrňte jeho základní vlastnosti. Speciálně: zadefinujte jednotkovou kouli v prostoru ℓ^2 . Je uzávěr této koule kompaktní v ℓ^2 ?

[8] 2. Matematickými symboly запиšte objekt *homogenní skalární lineární obyčejná diferenciální rovnice 4-tého řádu s konstantními reálnými koeficienty*.

- Pro tuto rovnici zformulujte počáteční úlohu.
- Převeďte tuto skalární rovnici (a tuto počáteční úlohu) na systém rovnic prvního řádu $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ (a odpovídající počáteční úlohu). Uveďte explicitně tvar $\mathbf{f}(\mathbf{y})$.
- Zdefinujte pojem řešení pro takto zavedenou počáteční úlohy systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.
- Zaveďte takto zavedenou počáteční úlohu pro systém rovnic prvního řádu ekvivalentní integrální formulaci a ekvivalenci dokažte.
- Co lze říci o existenci a dalších kvalitativních vlastnostech (jako jsou jednoznačnost, hladkost) řešení této úlohy?
- Ukažte, že $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, uvedená v druhém puntíku, je lipschitzovsky spojitá (uveďte definici tohoto pojmu).

- [8] 3. (1) Uveďte definici Banachova prostoru, dále značeného symbolem X , včetně definic všech pojmů, které k této definici potřebujete.
- (2) Zdefinujte pojmy T je kontraktivní zobrazení na X a T má v X pevný bod.
- (3) Zformulujte Banachovu větu o pevném bodě a dokažte část týkající se jednoznačnosti.
- (4) Pomocí Banachovy věty ukažte, že existuje řešení rovnice $4x + 3 \cos x = 15$.