Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	6	6	12	36
Získáno						

[6] 1. Pro $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(1+\sin\left(\pi x^{\alpha}\right)\right)}{x^{\beta}-1}.$$

Řešení:

Zaveďme značení

$$L \equiv \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(1+\sin\left(\pi x^{\alpha}\right)\right)}{x^{\beta}-1}.$$

Platí

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(1+\sin\left(\pi x^{\alpha}\right)\right)}{\sin\left(\pi x^{\alpha}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\pi x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\pi x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}-1},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili znalost limity

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

a větu o limitě složené funkce a větu o limitě součinu.

Dále máme

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\pi x^{\alpha}\right)}{\pi\left(1-x^{\alpha}\right)} \cdot \frac{\pi\left(1-x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\pi\left(1-x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}-1} = -\pi \lim_{x\to 1} \frac{x^{\alpha}-1}{x^{\beta}-1},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili znalost limity

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\pi x^{\alpha}\right)}{\pi\left(1-x^{\alpha}\right)} = \lim_{y\to 1} \frac{\sin \pi y}{\pi(1-y)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi(1-z)}{\pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin\pi\cos\pi z - \cos\pi\sin\pi z}{\pi z} = 1,$$

a větu o limitě složené funkce a větu o limitě součinu.

Konečně dostáváme

$$L = -\pi \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^{\alpha}-1}{\alpha\ln x}\alpha\ln x}{\frac{x^{\beta}-1}{\beta\ln x}\beta\ln x} = -\pi\frac{\alpha}{\beta},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili znalost limity

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\alpha}-1}{\alpha\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x} = 1,$$

a větu o limitě součinu/podílu.

[6] 2. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{80} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^{100}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{100} + \left(1+\frac{3}{n}\right)^{120} - 2}.$$

Řešení:

Pro následující limitu funkce platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{80} - (1+2x)^{100}}{(1-2x)^{100} + (1+3x)^{120} - 2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{80\,(1+x)^{79} - 2\cdot 100\,(1+2x)^{99}}{-2\cdot 100\,(1-2x)^{99} + 3\cdot 120\,(1+3x)^{119}} = \frac{80-200}{-200+360} = -\frac{3}{4},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili l'Hôspitalova pravidla pro výpočet limity typu "$\frac{0}{0}$". Použijeme-li nyní Heineho větu s volbou $x_n = \frac{1}{n}$, dostáváme, že limita zadané posloupnosti je taktéž rovna $-\frac{3}{4}$.

Alternativně můžeme spočítat limitu posloupnosti přímo s využitím binomické věty

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{80} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^{100}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{100} + \left(1+\frac{3}{n}\right)^{120} - 2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{80}\binom{80}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i - \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}\left(\frac{2}{n}\right)^j}{\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(-\frac{2}{n}\right)^k + \sum_{l=0}^{120}\binom{120}{l}\left(\frac{3}{n}\right)^l - 2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 80\frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{80}\binom{80}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i - 1 - 100\frac{2}{n} - \sum_{j=2}^{100}\binom{100}{j}\left(\frac{2}{n}\right)^j}{1 - 100\frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}\left(-\frac{2}{n}\right)^k + 1 + 120\frac{3}{n} + \sum_{l=2}^{120}\binom{120}{l}\left(\frac{3}{n}\right)^l - 2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(80-200)\,\frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{80}\binom{80}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i - \sum_{j=2}^{100}\binom{100}{j}\left(\frac{2}{n}\right)^j}{(-200+360)\,\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}\left(-\frac{2}{n}\right)^k + \sum_{l=2}^{120}\binom{120}{l}\left(\frac{3}{n}\right)^l} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-120 + \sum_{i=2}^{80}\binom{80}{i}\frac{1}{n^{i-1}} - \sum_{j=2}^{100}\binom{100}{j}\frac{2^j}{n^{j-1}}}{160 + \sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}\frac{(-2)^k}{n^{k-1}} + \sum_{l=2}^{120}\binom{120}{l}\frac{3^l}{n^{l-1}}} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

[6] 3. S využitím identity $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$, spočtěte primitivní funkci

$$F(x) = \int x^2 \cos^4 x \, \mathrm{d}x$$

na maximalním možném intervalu (a ten určete).

Řešení:

Integrand je definovaný a spojitý pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Primitivní funkce F bude tedy existovat na celém $\mathbb{R}$.

Dvojnásobné použití identity ze zadání vede na

$$F(x) = \int x^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int x^2 \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int x^2 \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

Po úpravě tedy hledáme tři primitivní funkce

$$F(x) = \frac{3}{8}\int x^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int x^2 \cos 2x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int x^2 \cos 4x \, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

V následujícím vynecháme psaní aditivní konstanty u primitivních funkcí a dopíšeme ji až u výsledku. Pro první primitivní funkci máme

$$\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}. \tag{2}$$

Dále pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos nx \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{matrix} u = x^2 & v = \frac{1}{n}\sin nx \\ u' = 2x & v' = \cos nx \end{matrix} \right| = \frac{1}{n}x^2 \sin nx - \frac{2}{n}\int x \sin nx \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x & v = -\frac{1}{n}\cos nx \\ u' = 1 & v' = \sin nx \end{matrix} \right| \\ &= \frac{1}{n}x^2 \sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^2}\int \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}x^2 \sin nx + \frac{2}{n^2}x \cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx.\end{aligned}$$

Po dosazení za $n = 2, 4$ tedy dostáváme pro zbylé dvě primitivní funkce

$$\int x^2 \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x, \tag{3}$$

$$\int x^2 \cos 4x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 \sin 4x + \frac{1}{8}x\cos 4x - \frac{1}{32}\sin 4x. \tag{4}$$

Poskládání výsledků (2), (3) a (4) do (5) pak dává hledanou primitivní funkci

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{3}{8}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x^2 \sin 4x + \frac{1}{8}x\cos 4x - \frac{1}{32}\sin 4x\right) + c \\ &= \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}\left(2x^2 - 1\right)\sin 2x + \frac{1}{256}\left(8x^2 - 1\right)\sin 4x + \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{64}x\cos 4x + c.\end{aligned}$$

[6] 4. Spočtěte primitivní funkci

$$F(x) = \int \frac{x^2 - x - 1}{x^4 - 1} \, \mathrm{d}x$$

na maximálních možných intervalech (a ty určete).

Řešení:

Integrand je definovaný a spojitý na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, +\infty)$. Na těchto intervalech tedy bude mít primitivní funkci. Integrand stačí rozložit na parciální zlomky a úloha je vpodstatě vyřešena, hledejme tedy rozklad

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} = \frac{A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^3 - x^2 + x - 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{x^4 - 1}.$$

Porovnáme-li koeficienty u jednotlivých mocnin x v čitatelích zlomků na levé a pravé straně výše uvedené rovnosti, dostaneme následující soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ A - B + D &= 1, \\ A + B - C &= -1, \\ A - B - D &= -1. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{4}, \\ B &= -\frac{1}{4}, \\ C &= \frac{1}{2}, \\ D &= 1, \end{aligned}$$

a proto

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^4 - 1} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2}\frac{x + 2}{x^2 + 1} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Celkem tedy dostáváme (mysleme si, že se nacházíme na jednom z intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, +\infty)$)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4} \ln |x - 1| - \frac{1}{4} \ln |x + 1| + \frac{1}{4} \left| x^2 + 1 \right| + \arctan x \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right| + \arctan x + c. \end{aligned}$$

[12] 5. Vyšetřete průběh funkce $f(x)$ dané předpisem

$$f(x) = \ln\left(1 - \left|x - x^2\right|\right).$$

Řešení:

Funkce je definována pro $x \in \mathbb{R}$, která zaručí nezápornost výrazu $1 - \left|x - x^2\right|$. Požedujeme tedy

$$1 - \left|x - x^2\right| > 0. \tag{5}$$

Odstraníme absolutní hodnotu. Jest

$$\left|x - x^2\right| = \begin{cases} -(x - x^2), & x \in (-\infty, 0) \\ (x - x^2), & x \in [0, 1] \\ -(x - x^2), & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Na intervalu $x \in [0, 1]$ se tedy podmínka (5) redukuje na

$$1 - x + x^2 > 0.$$

Rovnice $1 - x + x^2 = 0$ nemá reálné řešení, výraz $1 - x + x^2$ je tudíž vždy kladný. Na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$ se podmínka (5) redukuje na

$$1 + x - x^2 > 0.$$

Řešením rovnice $1 + x - x^2 = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, a nerovnost $1 + x - x^2 > 0$ proto platí pro $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, přičemž průnik tohoto intervalu s intervaly $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$ je $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ a $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Celkem proto dostáváme, že definiční obor funkce je

$$D_f = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Funkce je na definičním oborou spojitá, protože je složením spojitých funkcí. Funkce není periodická, není sudá ani lichá, limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x \to \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \mp} f(x) = -\infty.$$

Jest

$$\ln\left(1 - \left|x - x^2\right|\right) = \ln\left(1 - \left|x\left(1 - x\right)\right|\right) \begin{cases} \ln\left(1 + x\left(1 - x\right)\right), & x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \\ \ln\left(1 - x\left(1 - x\right)\right), & x \in [0, 1], \\ \ln\left(1 + x\left(1 - x\right)\right), & x \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

Spočteme první derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(1 - \left|x - x^2\right|\right)\right) = \begin{cases} \frac{-2x+1}{1+x(1-x)}, & x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \\ \frac{2x-1}{1-x(1-x)}, & x \in (0, 1), \\ \frac{-2x+1}{1+x(1-x)}, & x \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

Derivace není definována v bodech $x = 0$ a $x = 1$, limity derivace jsou

$$\lim_{x \to 0\pm} f'(x) = \mp 1,$$
$$\lim_{x \to 1\pm} f'(x) = \pm 1,$$

derivace je nulová v bodě $x = \frac{1}{2}$. Ze znaménka první derivace plyne, že

$$f(x) \text{ je } \begin{cases} \text{rostoucí}, & x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \\ \text{klesající}, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \text{rostoucí}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ \text{klesající}, & x \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

Z výše uvedeného plyne, že funkce bude mít lokální minimum v $x = \frac{1}{2}$. Je rovněž jasné, že funkce bude mít globální maximum v bodech $x = 0$ a $x = 1$ a hodnota funkce v těchto bodech je rovná 0.

Spočtěme druhou derivaci, nejprve na intervalu $(0,1)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\ln\left(1-\left|x-x^2\right|\right)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2x-1}{1-x\left(1-x\right)}\right)=-\frac{2x^2-2x-1}{\left(1-x\left(1-x\right)\right)^2},$$

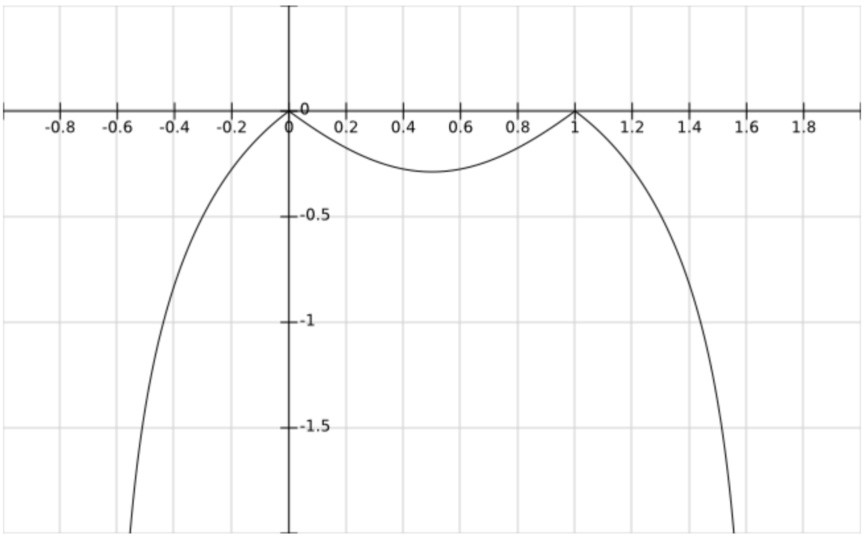
derivace je zřejmě na uvedeném intervalu vždy kladná. Spočtěme druhou derivaci na zbývajících intervalech $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$ a $\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\ln\left(1-\left|x-x^2\right|\right)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-2x+1}{1+x\left(1-x\right)}\right)=-\frac{2x^2-2x+3}{\left(1-x\left(1-x\right)\right)^2},$$

a druhá derivace je na uvedeném intervalu vždy záporná. Celkem

$$f(x)\text{ je }\begin{cases}\text{konkávní,} & x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right),\\ \text{konvexní,} & x\in\left(0,1\right),\\ \text{konkávní,} & x\in\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\end{cases}$$

Máme dostatek informací k nakreslení grafu, viz Obrázek 1, z něhož vyčteme doposud neurčené charakteristiky. Funkce zřejmě není prostá a obor hodnot je $\mathcal{R}_f=(-\infty,0]$.



Obrázek 1: Průběh funkce $\ln\left(1-\left|x-x^2\right|\right)$.