LINEÁRNÍ

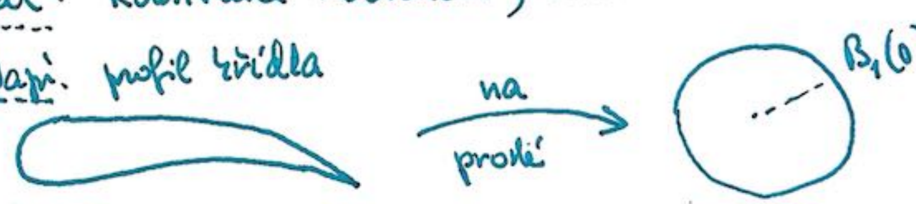
15.7. LOMENÉ FUNKCE A KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ A APLIKACE

(starší: Möbiovy transformace)
homografie

Úloha (motivační) Chci vyřešit Laplaceovu rovnici na komplikované oblasti $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$, přitom však vím (co zatím není náš případ) jak řešit Laplaceovu rovnici na čtverci či kruhu či jiné jiné pěkné množině (oblasti) $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ (např. poloprostor). Mohu se tedy ptát, zda lze převést Ω_1 na Ω_2 tak, že se mi parciální diferenciální operátor (jako Laplaceův operátor) příliš nezmění.

Podcíl: Konstrukce zobrazení, které danou oblast převede na jednodušší oblast prostě.

Např. profil křídla

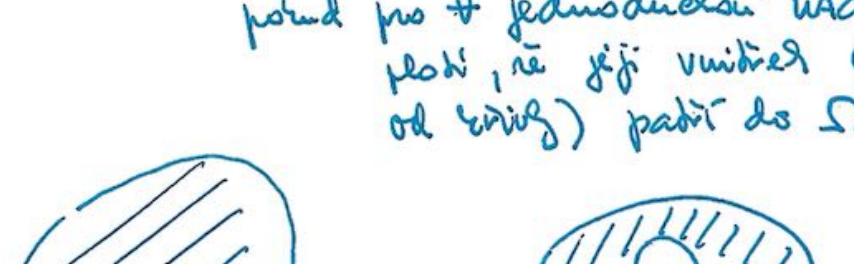


„Pozitivní" odpověď na náš podcíl dává následující Riemannova věta. Jejímu znění předchází dvě definice.

Definice Řekneme, že $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ je biholomorfní $\stackrel{df}{\equiv}$
- $f : \Omega_1 \xrightarrow{na} \Omega_2$ prostá
- $f \in H(\Omega_1)$
- $f^{-1} \in H(\Omega_2)$

Definice ① Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, omezená je jednoduše souvislá pokud $\mathbb{C} - \Omega$ je souvislá ($\forall$ 2 body lze spojit křivkou která leží v $\mathbb{C} - \Omega$)

② Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená je jednoduše souvislá pokud pro $\forall$ jednoduchou*) uzavřenou křivku ležící v Ω platí, že její vnitřek (množina ležící nalevo od křivky) patří do Ω



jednoduše souvislá množina

množina, která není jednoduše souvislá

*) $\varphi : (a,b) \to \mathbb{C}$ je jednoduchá uzavřená $\stackrel{df}{\equiv}$
- $\varphi : (a,b\rangle \xrightarrow{na} \langle \varphi \rangle$ prostá a φ^{-1} je spojitá
- $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Nyní již skilovaná Riemannova věta

Věta (Riemannova) • Je-li $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá, otevřená, pak $\exists! \varphi : \Omega \xrightarrow{\text{na}} B_1(0)$, která je biholomorfní

Navíc, lze volit ω a α tak, že $\varphi(z_0) = \omega$ a $\underbrace{\operatorname{Arg} \varphi'(z_0) = \alpha}$ předepisuji otočení (zobrazení) v z_0 o úhel α.

$\boxed{\text{Např. } \omega = 0 \text{ a } \alpha > 0}$

• $\mathbb{C}$ nelze biholomorfně zobrazit na $B_1(0)$.

Větu nebudeme dokazovat. Věta nedává návod jak funkci φ sestrojit, ale víme, že existuje.

Lomené funkce představují třídu speciálních funkcí, které transformace množin na sebe umožňují.

Uvažujme nejdříve čtyři základní funkce:

① $f(z) = z + b : \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{prostě}]{\text{na}} \mathbb{C}^*$ je pro $b \in \mathbb{C}$ posunutí $(\infty \mapsto \infty)$

② $f(z) = az : \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{prostě}]{\text{na}} \mathbb{C}^*$ je pro $a \in \mathbb{C}$ přiřazuji z bod otočený o $\operatorname{Arg} a$ a přeškálovaný $|a|$

zahrnuji:
- identitu $a = 1$
- rotaci o úhel $\operatorname{Arg} a$ (pro $|a| = 1$)
- stejnolehlost $a \in \mathbb{R}$ (homotetie)
- středovou souměrnost $a = -1$.

③ $f(z) = az + b : \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{na}]{\text{prostě}} \mathbb{C}^*$ složení ① a ② $(\infty \mapsto \infty)$

④ $f(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{na}]{\text{prostě}} \mathbb{C}^*$

$$0 \mapsto \infty$$
$$\infty \mapsto 0$$
$$\partial B_1(0) \xrightarrow{\text{na}} \partial B_1(0)$$
$$B_1(0) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$$
$$\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)} \xrightarrow{\text{na}} B_1(0)$$

Definice Zobrazení $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ kde $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ daná se nazývá lineární lomené zobrazení (neboli homografie neboli Möbiova transformace)

Platí: $\boxed{i}$ $f : \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{prostě}]{\text{na}} \mathbb{C}^*$ $\qquad -\frac{b}{c} \to 0$ $\qquad -\frac{d}{c} \to \infty$ $\qquad f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$

$\boxed{c = 0} \Rightarrow$ ③ $\qquad \boxed{c \neq 0}$

[ii] • ① – ④ jsou speciální případy $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

• Platí však i "opačné" tvrzení. Všimněme si, že

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,\frac{c}{c} = \frac{a}{c}\,\frac{cz+d}{cz+d} + \frac{bc-ad}{(cz+d)c} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\,\frac{1}{cz+d}$$

a tedy

$$f(z) = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} f_5(z) &= cz \\ f_4(z) &= z+d \\ f_3(z) &= \frac{1}{z} \\ f_2(z) &= \frac{bc-ad}{c}\,z \\ f_1(z) &= z + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

[iii] L … množina všech lineárních lomených zobrazení s operací skládání (složení) $\circ$ tvoří grupu

$\boxed{(L,\circ)\ \text{Möbiova grupa.}}$ také se značí $\boxed{L(\mathbb{C}^*)}$

Ještě než si shrneme vlastnosti lineárních lomených funkcí, uvedeme dvě definice.

Definice Jsou-li $a,b,c,d \in \mathbb{C}^*$ navzájem různá, pak

$$\frac{\frac{c-a}{c-b}}{\frac{d-a}{d-b}}$$ se nazývá dvojpoměr

(je-li některé z a,b,c,d rovno ∞, pak daný rozdíl je roven 1)

Definice i tvrzení Rovnice ⊛ $\boxed{az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0}$ $z \in \mathbb{C}$ $\boxed{\begin{array}{l} a,c \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{C} \\ ac < |b|^2 \end{array}}$

je obecná rovnice přímek a kružnic v komplexní rovině.

Pro $a=0$, ⊛ vede k přímce ; Pro $a \neq 0$, ⊛ popisuje kružnici

Věta (Vlastnosti lineárních lomených funkcí) Platí:

(1) $\forall f \in L$: $f : \mathbb{C}^* \xrightarrow[\text{prosté}]{\text{na}} \mathbb{C}^*$ spojité

(2) $(L,\circ)$ je grupa (asociativní, s jednotkou, inverzí)

(3) S výjimkou identity: každé $f \in L$ má nejvýše dva pevné body (tj. $f(z)=z$)

(4) Pro libovolné dvě trojice navzájem různých bodů (z_1,z_2,z_3) a (w_1,w_2,w_3) existuje právě jedno $f \in L$ tak, že $f(z_i) = w_i$, $i = 1,2,3.$

Navíc je toto zobrazení dáno předpisem:

$$\frac{\frac{w-w_2}{w-w_1}}{\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}} = \frac{\frac{z-z_2}{z-z_1}}{\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}} \iff \frac{w-w_2}{w-w_1}\,\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_2}{z-z_1}\,\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

kde $w := f(z)$

Opět, je-li některé ze z_j i w_j rovno ∞, pak podíl nahradíme 1.

(5) Každé $f \in L$:
- převádí zobecněné kružnice na zobecněné kružnice
- zachovává dvojpoměr
- převádí jednu z oblastí, které odděluje zobecněná kružnice γ na jednu z oblastí které podděluje $f(\gamma)$.

V třídě lineárních lomených funkcí (tedy) umíme převádět oblast na (jednoduššího) oblast.

Pozorování Je-li $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω oblast, $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$, pak z Taylorova rozvoje

$$f(z) - f(z_0) \doteq f'(z_0)(z - z_0)$$

což implikuje

$$\underbrace{|f(z)-f(z_0)| \doteq |f'(z_0)|\,|z-z_0|}_{\text{odsud plyne, že vzdálenost obrazů } f(z) \text{ a } f(z_0) \text{ jsou } |f'(z_0)|\text{-krát vzdálenost } z \text{ a } z_0}$$

a

$$\underbrace{\operatorname{Arg}(f(z)-f(z_0)) \doteq \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg}(z-z_0)}_{\text{odsud plyne, že (pro pevné } z_0\text{) se úsečka spojující } z \text{ a } z_0 \text{ otočí o stejný úhel rovný argumentu } f'(z_0)}$$

Definice Zobrazení $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované na otevřené množině U, se nazývá konformní v U
$\overset{df}{\equiv}$
- f je jakožto zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ regulární*) v U
- f zachovává velikost křivek ležících v U, tzn. pro $\forall z_0 \in U$ a $\forall \gamma_1, \gamma_2$ křivky takové, že $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ a $\gamma_1'(0) \neq 0 \neq \gamma_2'(0)$ platí $\left|\arg \frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)}\right| = \left|\arg \frac{(f\circ\gamma_1)'(0)}{(f\circ\gamma_2)'(0)}\right|$

f je konformní 1. druhu $\overset{df}{=}$ zachovává orientaci
f je konformní 2. druhu $\overset{df}{=}$ jinak

Příklad: Fce $z \mapsto z^2$ není konformní v 0

*) viz kapitola fce více proměnných

$\boxed{\text{Věta 15.25}}$ Je-li $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, pak je $\underline{f \text{ konformní v } \Omega}$

(Dk) Z definice a z derivování složené fce plyne:

$$\underbrace{\frac{(f\circ\gamma_1)'(0)}{(f\circ\gamma_2)'(0)}} = \frac{f'(\gamma_1(0))\,\gamma_1'(0)}{f'(\gamma_2(0))\,\gamma_2'(0)} = \frac{f'(z)}{f'(z)}\,\frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)} = \frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)}$$

a z podmínky plyne tvrzení.

Jinak také
$$\operatorname{Arg}(f\circ\gamma_1)'(0) = \operatorname{Arg} f'(z) + \operatorname{Arg}\gamma_1'(0)$$
$$\operatorname{Arg}(f\circ\gamma_2)'(0) = \operatorname{Arg} f'(z) + \operatorname{Arg}\gamma_2'(0)$$
a tedy tečné vektory k křivkám se otočí o stejný úhel $\operatorname{Arg} f'(z)$ a tedy se zachovávají.

$\boxed{\text{Věta 15.26}}$ (transformace Laplaceova operátoru holomorfním zobrazením)
Buď $f : \Omega_1 \xrightarrow{na} \Omega_2$ holomorfní v Ω_1. Nechť $v \in C^2(\tilde{\Omega}_2)$, kde $\tilde{\Omega}_2 := \{(s,t);\, s+it \in \Omega_2\}$
Položme $u(x,y) = v(\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy))$. Pak

$$\Delta_{xy} u = \frac{1}{2}\left(|\nabla_{xy}\operatorname{Re} f|^2 + |\nabla_{xy}\operatorname{Im} f|^2\right)\Delta_{st} v(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) = |f'(z)|^2\Delta_{st} v(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$$

Aplikace Máme-li najít u, která je harmonická v nějaké jednoduše souvislé oblasti $\tilde{\Omega}_1 \subset \mathbb{R}^2$, pak nejdříve zobrazíme $\Omega_1 := \{z = x+iy;\, (x,y) \in \Omega_1\}$ holomorfní funkcí (s nenulovou derivací; např. lineárním lomeným zobrazením) na polorovinu či kruh, kde lze harmonickou funkci v explicitně nalézt či lépe studovat. Pak dle Věty 15.26 $u(x,y) = v(\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy))$ je harmonická.

$\boxed{\text{Dk Věty 15.26}}$ Plyne z derivování řetízkového pravidla a (C-R) podmínek.

$s := \operatorname{Re} f$, $t := \operatorname{Im} f$ (značení)

Víme:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t}\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t}\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

a tedy

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial v}{\partial s}\Delta s + 2\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right]$$

Cauchy-Riemannovy podmínky implikují $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y}$ a $\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial t}{\partial x}$
a tak $\Delta t = 0$, $\Delta s = 0$, $\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y} = 0$ a $|\nabla t|^2 = |\nabla s|^2$

což dává výsledek.