Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	8	10	8	10	36
Získáno					

[8] 1. Budiž dána funkce

$$f(z) = \frac{1}{(\sin z)^3}.$$

V bodě $z_0 = 0$:

a) určete typ singularity,

b) najděte *hlavní část* Laurentovy řady funkce $f(z)$,

c) spočtěte reziduum.

Dále zjistěte v jakých dalších bodech $z \in \mathbb{C}$, pokud vůbec, má funkce $f(z)$ singularity.

Řešení:

Víme, že v okolí nuly platí

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots ,$$

aneb $\sin z \approx z$, z čehož je okamžitě vidět, že singularita funkce $f(z) = \frac{1}{(\sin z)^5}$ v nule je pól násobnosti tři. Laurentova řada funkce $f(z)$ v $z_0 = 0$ tudíž bude mít tvar

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z}}_{\text{hlavní část}} + \sum_{n=0} a_n z^n,$$

kvůli symetrii $\sin z = -\sin(-z)$ dokonce víme, že v rozvoji budou pouze členy s lichými mocninami z. Jest tedy

$$f(z) = \underbrace{\frac{b}{z^3} + \frac{c}{z}}_{\text{hlavní část}} + \sum_{n=0} a_{2n+1} z^{2n+1},$$

přičemž naším úkolem je určit hodnoty parametrů b a c. Víme, že platí

$$\frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)^3} = \frac{b}{z^3} + \frac{c}{z} + \sum_{n=0} a_{2n+1} z^{2n+1},$$

odkud plyne, že

$$1 = \left(\frac{b}{z^3} + \frac{c}{z} + \cdots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)^3. \tag{1}$$

Budeme upravovat výraz na pravé straně. Uvědomíme si, že platí

$$\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)^3 = z^3\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)^3 = z^3\left(1 + 3\left(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\right) + \cdots\right),$$

kde jsme použili známý rozvoj $(1+x)^3 \approx 1 + 3x + 3x^2 + \cdots$. Vrátíme se ke zkoumanému výrazu a vidíme, že

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{z^3} + \frac{c}{z} + \cdots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)^3 &= \left(\frac{b}{z^3} + \frac{c}{z} + \cdots\right) z^3 \left(1 + 3\left(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\right) + \cdots\right) \\ &= \left(b + cz^2 + \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^2 + \cdots\right) = b + \left(-\frac{b}{2} + c\right) z^2 + \cdots .\end{aligned}$$

Vrátíme se k rovnici (1) a vidíme, že má platit

$$1 = b + \left(-\frac{b}{2} + c\right) z^2 + \cdots ,$$

odkud plyne, že

$$b = 1,$$
$$c = \frac{1}{2}.$$

Zjistili jsme tedy, že Laurentova řada hledané funkce v bodě $z_0 = 0$ má tvar

$$\frac{1}{(\sin z)^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0} a_{2n+1} z^{2n+1},$$

odkud můžeme okamžitě odečíst hodnotu rezidua v bodě $z_0 = 0$ jako koeficient u mocniny $\frac{1}{z}$. Jest tedy

$$\operatorname{res}_{z_0=0} \frac{1}{(\sin z)^3} = \frac{1}{2}.$$

Pro nalezení ostatních singularit funkce $\frac{1}{(\sin z)^3}$ je nutné vyřešit rovnici

$$(\sin z)^3 = 0,$$

což je snadné neboť $\sin z = 0$ pouze pro $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tyto singularity jsou opět póly násobnosti tři. (Ale na to se nikdo neptal.)

[10] 2. Připomeňte si Cauchyho vzorec

$$f(\mathbb{A}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta,$$

kde f je holomorfní funkce definovaná na $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A}$ je daná matice. S použitím Cauchyho vzorce spočtěte $\mathrm{e}^{\mathbb{A}}$, kde $\mathbb{A}$ je matice definovaná jako

$$\mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve si spočteme vlastní čísla matice $\mathbb{A}$. Jest

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2),$$

a vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -2$. (To je samozřejmě vidět rovnou.) Pro výpočet podle Cauchyho vzorce potřebujeme spočíst inverzní matici k matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, přímočarý výpočet dává

$$(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = - \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}^{-1} = - \frac{1}{(\lambda-2)(\lambda+2)} \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda-2} & -\frac{2}{(\lambda-2)(\lambda+2)} \\ 0 & \frac{1}{\lambda+2} \end{bmatrix}.$$

Dosazením do Cauchyho vzorce dostaneme

$$\mathrm{e}^{\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda-2} & -\frac{2}{(\lambda-2)(\lambda+2)} \\ 0 & \frac{1}{\lambda+2} \end{bmatrix}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda-2} & -\frac{2}{(\lambda-2)(\lambda+2)} \\ 0 & \frac{1}{\lambda+2} \end{bmatrix} \mathrm{e}^\lambda \, \mathrm{d}\lambda$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^\lambda}{\lambda-2}\, \mathrm{d}\lambda & -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{2\mathrm{e}^\lambda}{(\lambda-2)(\lambda+2)}\, \mathrm{d}\lambda \\ 0 & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^\lambda}{\lambda+2}\, \mathrm{d}\lambda \end{bmatrix},$$

kde γ je nějaká křivka v komplexní rovině volená tak, aby body $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -2$ ležely uvnitř této křivky; můžeme například volit kružnici se středem v počátku a o poloměru 3; $\boldsymbol{\gamma} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Jednotlivé integrály spočteme pomocí reziduové věty. (Nijak nepoužíváme Jordanovo lemma, poloměr kružnice *nejde* k nekonečnu, poloměr je pevný.) Integrand je vždy holomorfní funkce kromě bodů $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -2$ a v každém z těchto bodů má pól násobnosti jedna. Rezidua spočteme podle tvrzení:

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
>
> $$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left. \frac{f(z)}{g'(z)} \right|_{z=z_0}.$$

Přímočarý výpočet vede na

$$\operatorname{res}_{\lambda=2} \frac{\mathrm{e}^\lambda}{\lambda-2} = \left. \mathrm{e}^\lambda \right|_{\lambda=2} = \mathrm{e}^2,$$
$$\operatorname{res}_{\lambda=-2} \frac{\mathrm{e}^\lambda}{\lambda+2} = \left. \mathrm{e}^\lambda \right|_{\lambda=-2} = \mathrm{e}^{-2},$$
$$\operatorname{res}_{\lambda=2} \frac{2\mathrm{e}^\lambda}{(\lambda-2)(\lambda+2)} = \left. \left(\frac{2\mathrm{e}^\lambda}{\lambda+2} \right) \right|_{\lambda=2} = \frac{\mathrm{e}^2}{2},$$
$$\operatorname{res}_{\lambda=-2} \frac{2\mathrm{e}^\lambda}{(\lambda-2)(\lambda+2)} = \left. \left(\frac{2\mathrm{e}^\lambda}{\lambda-2} \right) \right|_{\lambda=-2} = -\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}.$$

Celkem proto

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{2\mathrm{e}^\lambda}{(\lambda-2)(\lambda+2)}\, \mathrm{d}\lambda = -\left(\operatorname{res}_{\lambda=2} \frac{2\mathrm{e}^\lambda}{(\lambda-2)(\lambda+2)} + \operatorname{res}_{\lambda=-2} \frac{2\mathrm{e}^\lambda}{(\lambda-2)(\lambda+2)} \right) = -\frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} \right),$$

a obdobně lze postupovat pro další integrály. Jest tedy

$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} \right) \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{bmatrix}.$$

Při výpočtu je také možné využít triku, který plyne z Cauchyho vzorce. Je-li $f = g$ na spektru matice $\mathbb{A}$, aneb je-li $\forall \lambda_i \in \sigma(\mathbb{A}) : f(\lambda_i) = g(\lambda_i)$, pak je také $f(\mathbb{A}) = g(\mathbb{A})$. Volme si vhodně funkci g, která splňuje předchozí požadavek

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{4}(x+2) + \mathrm{e}^{-2}.$$

(Funkce je polynomiální v x, nemáme tedy potíže s jejím vyčíslením ani pro matice. Polynomy od matic umíme snadno spočíst.) Pak zjevně platí $g(x)|_{x=\pm 2} = \mathrm{e}^x|_{x=\pm 2}$ a můžeme tedy psát—*pro naši konkrétní matici*—

$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}} = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{4}(\mathbb{A} + 2\mathbb{I}) + \mathrm{e}^{-2}\mathbb{I},$$

což po dosazení kupodivu vede ke stejnému výsledku jako výše, to jest

$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}\right) \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{bmatrix}.$$

[8] 3. Zkoumejte posloupnost $\{f_{\alpha,n}\}_{n=1}^{+\infty}$ jejíž jednotlivé členy jsou definovány jako

$$f_{\alpha,n}(x) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{\alpha} \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. (Parametr α je stejný pro všechny členy posloupnosti.)

a) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ve smyslu konvergence distribucí platí

$$T_{f_{\alpha,n}} \to \delta,$$

kde δ je Diracova distribuce v nule a $T_{f_{\alpha,n}}$ jsou regulární distribuce přiřazené lokálně integrovateným funkcím $f_{\alpha,n}$.

b) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ve smyslu konvergence distribucí platí

$$T_{f_{\alpha,n}} \to 0.$$

Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována. Připomínáme, že pro $a > 0$ platí $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Řešení:

Chceme najít hodnotu parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, tak, aby pro každou testovací funkci φ platilo

$$\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \left\langle T_{\delta}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde konvergence je nyní standardní kovergence posloupnosti reálných čísel $\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$, a kde Diracova distribuce T_{δ} je zavedena standardním způsobem jako $\left\langle T_{\delta}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} =_{\mathrm{def}} \varphi(0)$. Musíme proto ukázat, že pro každou testovací funkci φ dostaneme

$$\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \varphi(0).$$

(Ve smyslu posloupnosti čísel.) Dualita $\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ je reprezentována integrálem, neboť $f_{\alpha,n}$ jsou lokálně integrovatelné funkce

$$\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha,n}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Využíváme standardního ztotožnění lokálně integrovatelných funkcí s příslušnými distribucemi.) Po překladu definic do primitivních pojmů tedy chceme ukázat, že pro každou testovací funkci φ dostaneme

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha,n}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} \varphi(0)$$

Obdobně v druhé otázce chceme najít hodnotu parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, tak, aby pro každou testovací funkci φ platilo

$$\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to 0.$$

Nyní již musíme počítat. Jest

$$\begin{aligned}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha,n}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{\alpha} \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{4}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} y = x\sqrt{n} \\ \mathrm{d}y = \sqrt{n}\mathrm{d}x \end{vmatrix} \\ &= \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y \xrightarrow{n\to+\infty} \begin{cases} \varphi(0) \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}y = \varphi(0), & \alpha = \frac{1}{2}, \\ 0, & \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili skutečnost, že y nabývá kvůli kompaktnosti nosiče funkce φ hodnot z nějakého omezeného intervalu, a znalost tabulkového integrálu $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Záměna limity a integrálu je oprávněná, stačí si uvědomit, že testovací funkce je spojitá funkce s kompaktním nosičem.

[10] 4. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte na prostoru regulárních distribucí rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - 6f = a\delta,$$

kde δ značí Diracovu distribuci v bodě nula a $a \in \mathbb{R}^+$ je parametr, a kde vyžadujeme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. (Limitu v tomto případě chápeme jako limitu funkce generující danou regulární distribuci.)

Řešení:

Rovnici přepíšeme jako systém rovnic prvního řádu, je-li

$$g = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

pak původní rovnice přeje na

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix},$$

což lze symbolicky zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y} + \delta\mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{y} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}.$$

Řešení úlohy budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_+ H + \mathbf{y}_- (1 - H),$$

kde H značí Heavisideovu distribuci, která je definována jako regulární distribuce přiřazená lokálně integrovatelné funkci

$$H = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

a kde $\mathbf{y}_\pm$ jsou hladké funkce. Dosadíme-li takto definovanou funkci do diferenciální rovnice $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y} + \delta\mathbf{b}$, dostaneme s použitím vztahu $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\delta}$ a s použitím pravidel pro práci s distribucemi rovnici

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_-}{\mathrm{d}x} - \mathbb{A}\mathbf{y}_-\right)(1 - H) + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_+}{\mathrm{d}x} - \mathbb{A}\mathbf{y}_+\right) H + (-\mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ - \mathbf{b})\,\delta = \mathbf{0}.$$

Z této rovnice vidíme, že musí platit

$$x < 0: \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_-}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y}_-,$$
$$x > 0: \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_+}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y}_+,$$

a také

$$-\lim_{x\to 0-} \mathbf{y}_- + \lim_{x\to 0+} \mathbf{y}_+ - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Řešením rovnic jsou funkce

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_\pm}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\mathbb{A}x}\mathbf{C}_\pm,$$

kde $\mathbf{C}_\pm$ je konstatní vektor. Maticovou exponenciálu nemusíme explicitně počítat, stačí si uvědomit, že diferenciální rovnici prvního řádu $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_-}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y}_-$, lze zapsat jako diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_-}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}x} - 6f_- = 0,$$

kde

$$\mathbf{y}_- = \begin{bmatrix} f_- \\ g_- \end{bmatrix}.$$

Rovnici pro f_- snadno vyřešíme, výsledkem je

$$f_- = A_-\mathrm{e}^{-3x} + B_-\mathrm{e}^{2x},$$

kde A_- a B_- jsou konstanty, které musíme určit z okrajových podmínek. Chceme aby platilo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f = 0,$$

což znamená, že požadujeme $\lim_{x\to-\infty} f_- = 0$, odkud plyne, že $A_- = 0$. Řešením je tedy funkce

$$f_- = B_- \mathrm{e}^{2x},$$

což znamená, že

$$\mathbf{y}_- = B_- \mathrm{e}^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(Připomeňme-si, že druhá složka vektoru $\mathbf{y}_-$ je definována jako $\frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}x}$.) Obdobně postupujeme i pro funkci $\mathbf{y}_+$. Diferenciální rovnici prvního řádu $\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}_+}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\mathbf{y}_+$, lze zapsat jako diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_+}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f_+}{\mathrm{d}x} - 6f_+ = 0,$$

kde

$$\mathbf{y}_+ = \begin{bmatrix} f_+ \\ g_+ \end{bmatrix}.$$

Rovnici pro f_+ snadno vyřešíme, výsledkem je

$$f_+ = A_+ \mathrm{e}^{-3x} + B_+ \mathrm{e}^{2x},$$

kde A_+ a B_+ jsou konstanty, které musíme určit z okrajových podmínek. Chceme aby platilo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f = 0,$$

což znamená, že požadujeme $\lim_{x\to+\infty} f_+ = 0$, odkud plyne, že $B_+ = 0$. Řešením je tedy funkce

$$f_+ = A_+ \mathrm{e}^{-3x},$$

což znamená, že

$$\mathbf{y}_+ = A_+ \mathrm{e}^{-3x} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Doposud jsme zjistili, že platí

$$\mathbf{y}_- = A_- \mathrm{e}^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_+ = B_+ \mathrm{e}^{-3x} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Zbývá určit hodnotu konstant A_- a B_+. K tomu použijeme skokovou podmínku

$$-\lim_{x\to 0-} \mathbf{y}_- + \lim_{x\to 0+} \mathbf{y}_+ + \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

která vede na soutavu rovnic

$$-A_- \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + B_+ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pro A_- a B_+. Řešením je

$$\begin{aligned} A_- &= -\frac{a}{5} \\ B_+ &= -\frac{a}{5}, \end{aligned}$$

a řešením zadané rovnice je tudíž regulární distribuce přiřazená funkci

$$f = \begin{cases} -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{2x}, & x < 0 \\ -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{-3x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Úlohu lze také vyřešit s použitím Fourierovy transformace. Použijeme Fourierovu transfroamci definovanou vztahem

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme. S použitím standardních pravidel pro práci s Fourierovou transformací zjistíme, že Fourierova transformace rovnice je

$$\mathcal{F}[f]\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}},$$

kde jsme také využili známého vztahu pro Fourierovu transformaci Diracovy distribuce. Platí tedy

$$\mathcal{F}[f] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)},$$

odkud

$$f = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)}\right].$$

Zbývá tedy spočíst inverzní Fourierovu transformaci. Výraz $\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)$ rozložíme na parciální zlomky a výsledkem je

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)}\right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi + 3\mathrm{i}\right)}\right]\right).$$

Spočteme inverzní Fourierovu transformaci obou sčítanců. Jest

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi,$$

a pro výpočet integrálu použijeme nástroje z komplexní analýzy. Budeme zkoumat integrál z komplexní funkce

$$g(z) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{5\left(z - 2\mathrm{i}\right)},$$

podél křivky $\boldsymbol{\gamma}_R$, kterou je kruhový oblouk o poloměru R v horní/dolní komplexní polorovině. Parametrizace obloku v horní polorovině je $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in (0, \pi)$, parametrizace úsečky na reálné ose je $z = \xi$, $\xi \in (-R, R)$. Pro danou parametrizaci tedy platí

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\xi=-R}^{R} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}}{5\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 2\mathrm{i}\right)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Jelikož je $\varphi \in (0, \pi)$ vidíme, že výraz

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\cos\varphi}\mathrm{e}^{xR\sin\varphi}$$

zůstává pro $R \to +\infty$ omezený pro $x < 0$. Přes kruhový oblouk v horní komplexní polorovině lze tedy integrovat pouze pro $x < 0$. Naopak, pro $x > 0$ musíme zvolit integraci přes kruhový oblouk v dolní komplexní polorovině. Zabývejeme se nyní případem $x < 0$. S použitím Jordanova lemmatu snadno ukážeme, že

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Podle reziduové věty ovšem platí, že

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s\in\mathrm{int}\boldsymbol{\gamma}_R}\, g(z).$$

V horní polorovině má funkce $g(z)$ jednu singularitu, a sice v bodě $z_s = 2\mathrm{i}$, a tato singularita je jednonásobným pólem. Residuum v bodě $z_s = 2\mathrm{i}$ je

$$\mathrm{res}_{z_s\in\mathrm{int}\boldsymbol{\gamma}_R} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{2x}}{5},$$

a proto pro $x < 0$ platí

$$\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi = -2\pi\frac{\mathrm{e}^{2x}}{5}.$$

Pro $x > 0$ integrujeme přes kruhový oblouk v dolní komplexní polorovině, kde však funkce $g(z)$ nemá singularitu, a je proto

$$\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Celkem tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} -\sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{5}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Obdobně postupujeme při výpočtu inverzní Fourierovy transformace pro druhý člen, tedy při výpočtu integrálu

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\,\mathrm{d}\xi.$$

Integrál opět spočteme integrací funkce

$$g(z) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{5\,(z+3\mathrm{i})}$$

podél vhodné křivky v komplexní rovině. Pro $x < 0$ volíme jako integrační křivku $\boldsymbol{\gamma}_R$ kruhový oblouk v horní komplexní polorovině, kde však funkce $g(z)$ nemá singularitu. Okamžitě tedy vidíme, že pro $x < 0$ platí

$$\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Naopak, pro $x > 0$ integrujeme přes kruhový oblouk v dolní komplexní polorovině, kde má funkce $g(z)$ singularitu v bodě $z_s = -3\mathrm{i}$. Reziduová věta a Jordanovo lemma tak vede pro $x > 0$ k výsledku

$$\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\,\mathrm{d}\xi = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s=-3\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{5\,(z+3\mathrm{i})} = 2\pi\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{5}.$$

(Jedno znaménko minus je kvůli orientaci integrační křivky.) Celkem tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{5}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Pro hledanou funkci f proto dostaneme

$$f = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\,(\xi-2\mathrm{i})}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\right]\right) = \begin{cases} -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{2x}, & x < 0, \\ -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{-3x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

což je kupodivu tentýž výsledek, jakého jsme dosáhli s použitím prvně studovaného postupu.