# 7. FOURIEROVY ŘADY

V roce 1807 (přesněji 21. 12.) Joseph Fourier ohromil své vrstevníky tvrzením:
„Libovolnou funkci lze vyjádřit jako lineární kombinaci sinů a cosinů".
Tyto lineární kombinace se nyní nazývají FOURIEROVY ŘADY. Fourierovy řady se staly nepostradatelným nástrojem analýzy jevů (šíření tepla, vibrace, pohyb planet, elektrické obvody, pohyb vln) studovaných ve fyzice a inženýrských odvětvích. Mnoho důležitých matematických otázek vzniklo a vzniká při vyšetřování vlastností Fourierových řad a vývoj moderní matematické analýzy (včetně zavedení Riemanova a Lebesgueova integrálu) bylo hluboce ovlivněno řešením těchto otázek.

Fourierovy řady slouží k analýze periodických oscilací a vibrací. (Vrátíme se k této situaci později.)

Funkce $A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01})$, $A_2 \sin(2\omega t + \varphi_{02})$, $A_3 \sin(3\omega t + \varphi_{03})$, ... jsou periodické s periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Součtem těchto funkcí dostáváme další periodické funkce s periodou $T$.

Fourier si položil následující otázku:
„Lze každou funkci zapsat ve tvaru součtu sinů a cosinů?"
Obecněji: máme-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodickou s periodou $T$ (neboli $f$ je $T$-periodická) [tzn. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z})\ f(x + kT) = f(x)$], lze pak $f$ zapsat ve tvaru $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ a $\phi_n$ jsou jednoduché $T$-periodické funkce?"

A vznikají další otázky:

* Jak lze $a_m$ nalézt ?
* Lze je určit jednoznačným způsobem ?
* Konvergují $\sum_{n=1}^{\infty} a_m \Phi_m(x)$ pro jakoukoliv $f$ ?
* Lze tyto řady integrovat/derivovat ?

Tyto ~~z~~ základní otázky teorie Fourierových řad lze popsat v obecnější části matematiky, tzv. <u>teorii ortonormálních systémů</u>.

$\boxed{\text{Motivace}}$ Uvažujme dva typy řad (Fourierových)

a) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$

b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_m \sin mx + b_m \cos mx$

- Ukažte, že systémy

(1) $\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$

a

(2) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{m\in\mathbb{N}}$

tvoří funkce, které jsou navzájem kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu $(f,g)_{L^2((-\pi,\pi))} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ v prostoru $L^2((-\pi,\pi))$ a

splňují $\|f\|^2_{L^2((-\pi,\pi))} = (f,f)_{L^2((-\pi,\pi))} = 1$.

(NEBOLI: oba systémy jsou ortonormální v $L^2((-\pi,\pi))$.

- Najděte vztah mezi $\{a_m, b_m\}$ na jedné straně a $\{c_m, c_{-m}\}$ na straně druhé!

# 7.1 Abstraktní Fourierovy řady

## 7.1.1 úplné ortonormální systémy, separabilita

**Def** Buď $H$ s $(\cdot,\cdot)_H$ a s $\|\cdot\|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$ Hilbertův (tzn. úplný lineární prostor se skalárním součinem).
Řekneme, že systém $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, kde $I$ je množina indexů a kde $\phi_\alpha \in H$ $(\forall \alpha)$, je

ortogonální $\equiv$ $(\phi_\alpha, \phi_\beta) = 0$ pro $(\forall \alpha, \beta)(\alpha \neq \beta)$.

ortonormální $\equiv$ $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je ortogonální a $(\phi_\alpha, \phi_\alpha)_H = 1$

úplný $\equiv$ pokud $(\phi, \phi_\alpha) = 0$ pro $\forall \alpha \in I$, pak $\phi = 0$.

**Def** Řekneme, že Hilbertův či Banachův prostor je separabilní $\equiv$ $\exists$ hustý spočetný systém v $H$.
(tzn. $(\exists \{\phi_m\}_{m=1}^{\infty})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \phi \in H)(\exists \phi_m)$ $\|\phi_m - \phi\|_H < \varepsilon$ )

Ukážeme (viz věta ...), že platí:
Má-li $H$ úplný spočetný ortonormální systém, pak je $H$ separabilní (tzn. lze vygenerovat hustou spoč. část)

**Několik příkladů**

1. Prostor $l_2 := \{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} ; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$ je separabilní Hilbertův prostor (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) neboť $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$, kde

$$\phi_m = (0, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ m\text{-tá pozice}}}{1}, 0, \ldots, 0, \ldots),$$ tvoří úplný ortonormální systém.

Skal. součin je dán vztahem:

$$x, y \in l_2 \Rightarrow (x, y)_{l_2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

Ověřte!

② Prostor $X := \{ f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R};\ f$ je nenulová jen v konečně bodech $\}$

s
$$(f,g)_X := \sum_{x \in \langle 0,1\rangle} f(x)\, g(x)$$
je lineární prostor se skalárním součinem a úplným ortonormálním systémem $\{\phi_\xi\}_{\xi \in \langle 0,1\rangle}$, kde $\phi_\xi$ je definováno vztahem
$$\phi_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \xi \\ 1 & x = \xi \end{cases}.$$
Ukažte!

Tedy, $X$ je příkladem Hilbertova prostoru, který není separabilní (neboť úplný ortonormální systém je indexován $\xi \in \langle 0,1\rangle$, což je nespočetná množina).

$\boxed{7.1.2}$ Věta o nejlepší aproximaci

Nyní si položíme následující úkol: Buď $f \in L^2(I)$, $|I| = l$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Najdeme ~~ner~~ takovou lineární kombinaci prvních $N$ prvků úplného ortonormálního systému $\{ e^{in\frac{2\pi}{l}t} \}_{n\in\mathbb{Z}}$ či $\{ 1, \cos\frac{2\pi n}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}nx \}_{n\in\mathbb{N}}$, která nejlépe aproximuje $f$.

Či obecněji: Buď $H$ separabilní Hilbertův, $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ úplný ortonormální systém a $f \in H$. Označme $t_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ libovolné. Pak

$\|f - t_m\|_H$ měří „jak dobře $t_m$ aproximuje $f$"

Otázka nejlepší aproximace je úlohou pro nalezení $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$, která „minimalizují" $\|f - t_m\|_H$:

ZKUSTE SAMI MINIMALIZOVAT $\|f - t_m\|_H^2$ přes $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Místo psaní minimalizační úlohy, uvažme $f = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$. Pak hledaná $\alpha_k$ jsou ta, pro které platí $\alpha_k = c_k$, $k = 1, \dots, m$. Jak můžeme $c_k$ vybrat/identifikovat? $(f, \phi_l)_H = \left( \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k, \phi_l \right) = c_l.$

Snadno. Z ortonormality (nebo ortogonality) máme:

Tato pozorování zformulujeme do následujícího tvrzení.

**Věta 7.1** Buď $H$ Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro libovolnou $f \in H$ položme $t_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$ a $s_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$, kde $\alpha_k \in \mathbb{C}$ a $c_k := (f, \phi_k)$.

Pak
1) $\|f - s_m\|_H \leq \|f - t_m\|_H$
2) Rovnost nastává právě když $\alpha_k = c_k$ pro $\forall k \in \{1, \dots, m\}$.

Dk Platí:

$$(*) \quad \begin{aligned} \|f - t_m\|_H^2 &= (f - t_m, f - t_m)_H \\ &= \|f\|_H^2 - (t_m, f)_H - (f, t_m)_H + (t_m, t_m)_H + \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \\ &= \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^{m} c_k \bar{\alpha}_k + \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2} \\ &= \underbrace{\|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2} + \sum_{k=1}^{m} |c_k - \alpha_k|^2 \\ &= \|f - s_m\|_H^2 + \sum_{k=1}^{m} |c_k - \alpha_k|^2 . \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili ortonormality systému $\{\phi_k\}_{k=1}^{m}$ pro $m \in \mathbb{N}$ libovolné. Vztah $(*)$ implikuje jak 1) tak 2). ∎

**Definice** Píšeme-li $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$, pak $c_k := (f, \phi_k)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ se nazývá abstraktní Fourierova řada prvku $f \in H$ vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Koeficienty $c_k$ se nazývají Fourierovy koeficienty

<u>Příklad</u> Buď $H = L^2((0,2\pi))$, $(f,g)_{L^2((0,2\pi))} := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ a $\{\phi^m\}_{m=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$. (Již víme, že $\{\phi^m\}$ je ortonormální systém v $L^2((0,2\pi))$.) Pak pro $f \in L^2((0,2\pi))$ dle předchozí definice máme

$$f \sim \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},$$

kde

$$\tilde{a}_0 = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dt, \quad \tilde{a}_k = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\,dt, \quad \tilde{b}_k = \int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\,dt \quad (k \in \mathbb{N})$$

NEBO ČASTĚJI (přeuspořádání násobků):

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

kde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad (k = 0,1,\dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \quad (\;\text{—}\!\!\|\!\!\text{—}\;).$$

Tento zápis Fourierovy řady $f$ má tu výhodu, že vzoreček pro $a_0$ a $a_k$ s $k \in \mathbb{N}$ je „stejný". Abych měl jeden vzoreček pro $a_k$, $k = 0,1,2,\dots$, tak jsem musel první koeficient v Four. řadě dělit 2.

## 7.1.3 Vlastnosti Fourierových koeficientů

**Věta 7.2** (Besselova nerovnost a Parsevalova rovnost)

Buď $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$.

Buď $f \in H$ a $f \sim \sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k$. Potom platí:

Besselova nerovnost

(i) $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 < \infty$ a platí $\boxed{\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \leq \|f\|_H^2}$

Parsevalova rovnost

(ii) $\boxed{\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \|f\|_H^2} \iff \lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_H = 0$, kde $s_n := \sum_{k=1}^n c_k \phi_k$

Dk) **Ad (i)** Plyne z ortonormality $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ a z identity

$$\boxed{0 \leq \|f - s_n\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2}$$

neboť odsud dostáváme, pro $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|f\|_H^2$, což implikuje obě tvrzení v (i).

**Ad (ii)** Identita v rámečku, tj. $\|f - s_n\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ dává ekvivalenci. ▨

Důsledek: Z (i) a z teorie číselných řad plyne, že $c_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Volíme-li speciálně $\{\phi_l\}_{l=1}^\infty = \{e^{ilx}\}_{l=1}^\infty$ tak pro $f \in L^2((0,2\pi))$

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(t) e^{int}\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{neboli} \quad \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{a} \quad \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

což je speciální případ tzv. Riemann-Lebesgueova lemmatu, které budeme mít později.

Pozorování! Parsevalova rovnost lze psát také ve tvaru

$$\|f\|_H^2 = \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}^2 \quad \text{kde } \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k, \ldots) \in \ell_2,$$

což indikuje, že každý (separabilní) Hilbertův prostor $H$ bude možné ztotožnit s prostorem $\ell_2$. V tomto smyslu je $L^2((0,2\pi))$ totéž co $\ell_2$. Viz Věta 7.6 dále.

$\boxed{\text{Věta}}$ **7.3** (Obrácení věty 7.2 – Riesz-Fischerova věta #2)

Buď $(H,(\cdot,\cdot))$ Hilbertův*) s ortonormálním systémem $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Nechť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$ (tj. $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty$). Pak $\exists f\in H$ tak, že

(i) $c_k=(f,\phi_k)$

(ii) $\|f\|_H^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$

Dk) Chceme ukázat, že $\forall c\in l_2\ \exists f\in H$ tak, že $c_k=(f,\phi_k)$ a platí $\|f-s_n\|_H^2\to 0$ kde $s_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k$.

Avšak

- $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pro $s_n:=\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k$ cauchyovská neboť pro libovolně malé $\varepsilon>0$ existuje dostatečně velké $n$ tak, že pro libovolné $p\in\mathbb{N}$ je

$$\|s_{n+p}-s_n\|_H^2=\Big\|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k\phi_k\Big\|_H^2=\sum_{k=n+1}^{n+p}|c_k|^2<\varepsilon$$

Protože $H$ je úplný, tak $\exists f\in H$ tak, že $s_n\to f$ v $H$, což je část tvrzení, které jsme chtěli ukázat. Zbývá ověřit, že

$c_k=(f,\phi_k)$.

Avšak

$$|c_k-(f,\phi_k)|=|(s_n,\phi_k)-(f,\phi_k)|\le|(s_n-f,\phi_k)|$$

$$\underbrace{\le}_{\text{Cauchy-Schwarz-Buňakovski}}\|s_n-f\|_H\,\|\phi_k\|_H\underbrace{=}_{\text{ortonormalita } \phi_k}\|s_n-f\|_H\to 0 \text{ pro } n\to\infty.$$

Tedy $c_k=(f,\phi_k)$. $\boxed{k}$

---

*) Úplnost Hilbertova prostoru je pro platnost tvrzení podstatná. Riesz-Fischerova věta #1 nám říká, že prostor $L^2(\Omega)$ je úplný. (V poznámkách také najdete, že $L^2(\Omega)$ je separabilní.) Tedy dle věty 7.3 a věty 7.2 existuje úzká souvislost mezi separabilními Hilbertovými prostory a prostorem $l_2$.

**Věta 7.4** (Charakterizace úplnosti $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$)

Buď $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ Hilbertův s ortonormálním systémem $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný

(ii) $(\forall f \in H)$ $\|f - s_n\|_H \to 0$ $\left( \text{kde } s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k = \sum_{k=1}^{n} (f, \phi_k)_H \phi_k \right)$

(iii) $(\forall f \in H)$ $\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

(iv) $\operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$ libovolné je hustý v $H$.

Dk $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ $f \in H$ dáno (libovolné, ale pevné). Pak pro $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$, kde $c_k := (f, \phi_k)$ dle Věty 7.2(i) platí, že $\sum |c_k|^2 < \infty$ a tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Existuje tedy $z \in H$ tak, že $s_n \to z$ v $H$. Navíc

$$(z, \phi_k) = \lim_{n\to\infty} (s_n, \phi_k) = c_k = (f, \phi_k) \quad \text{pro } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tedy $(z - f, \phi_k) = 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ a z předpokladu úplnosti $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ plyne $z - f = 0 \Leftrightarrow z = f$. Tedy $\|s_n - f\|_H \to 0$.

$\boxed{(ii) \Leftrightarrow (iii)}$ plyne z Věty 7.2 (ii).

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iv)}$ plyne z definice "hustý" a (ii)

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$ Předpokládáme, že $z \in H$ splňuje $(z, \phi_k) = 0$ a chceme ukázat, že $z = 0$. Dle předpokladu existuje $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $t_n \in \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ a

$$t_n \to z \text{ v } H.$$

Pak však

$$\|z\|_H^2 = (z, z) = \left(\lim_{n\to\infty} t_n, z\right) = \lim_{n\to\infty} (t_n, z) = 0$$

dle předpokladu (neboť $(z, \phi_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.)

(

∎

Implikace $\boxed{(i) \Rightarrow (iv)}$ předchozí věty dává tvrzení cenné zaznamenání.

**Důsledek Věty 7.4** Každý Hilbertův prostor, ve kterém existuje úplný ortonormální systém, je separabilní.

Platí obrácené tvrzení:

**Věta 7.5** V každém separabilním Hilbertově prostoru $H$ existuje úplný ortonormální systém

(Dk) Je založen na dvou krocích

krok 1) Uvažme hustou spočetnou část, která dle separability prostoru $H$ existuje, a označme ji $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

krok 2) Provedeme Gramm-Schmidtův ortonormalizační proces s mezikrokem, kdy do procesu přidáme jen ta $\psi_k$, která budou lineárně nezávislá na již nalezených $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$.

Přesněji:
- vezmi $\psi_1$ a definuj $\phi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|_H}$
- Podívej se, zda $\psi_2$ je LN s $\phi_1$. Pokud ne, podívej se, zda $\psi_3$ je LN s $\phi_1$ (a $\psi_2$ zahoď),

  Pokud ano, hledej $\phi_2$ ve tvaru $\phi_2 = \psi_2 - \alpha\phi_1$, kde $\alpha$ urči tak, aby
  $$(\phi_2, \phi_1)_H = 0 \quad \text{a} \quad \|\phi_2\|_H = 1,$$
  což dává
  $$\phi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \phi_1)_H \phi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \phi_1)\phi_1\|_H}$$
- ...

viz podrobněji Černý, Pokorný - MAF IV. ∎

**Věta 7.6** Každý separabilní Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ je isometrický s prostorem $l_2$.

Připomeň: Dva metrické prostory jsou isometrické, pokud existuje isometrie, zobrazující prostory na sebe (isometrie je zobrazení jednoho prostoru na druhý zachovávající metriku).

V našem případě Hilbertových prostorů je metrika daná normou (generovanou skalárním součinem). Hledáme tedy zobrazení mezi $H$ a $l_2$. Avšak $H$ je separabilní a dle Věty 7.5 v něm existuje úplný ortonormální systém $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Uvažme zobrazení $I : H \to l_2$.

$$\begin{array}{ccl} I : H & \to & l_2 \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & c = (c_1, \dots, c_k, \dots) \end{array}$$

$$c_k := (f, \phi_k)$$

a dle Věty 7.4, (i)⇔(iii):

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|c\|_{l_2}^2 \underset{*}{=} \|If\|_{l_2}^2,$$

což jsme chtěli ukázat. ◁

## 7.1.4 Uzavřené podprostory Hilbertova prostoru. Projekce.

Připomeňme si situaci z kapitoly 7.1.1. Pro $f \in H$, kde $H$ je nekonečně-dimensionální Hilbertův prostor s ortonormálním systémem $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, jsme hledali $s_m := \sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k$ tak, že $\|f - s_m\|_H \leq \|f - t_m\|_H$ kde $t_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$. Zjistili jsme, že $c_k = (f, \phi_k)$ je nejlepší volba.

Označme nyní $H_m := \operatorname{span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$. Pak $\boxed{\dim H_m = m < +\infty}$.

Definujme nějaké zobrazení $P : H \to H_m$ předpisem $P(f) = s_m$,

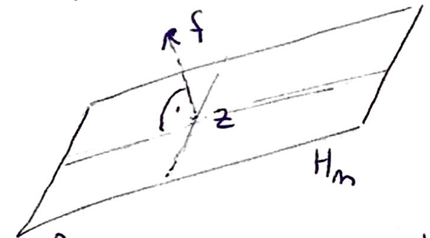
$$f \longmapsto s_m^f := \sum_{k=1}^{m} (f, \phi_k)_H \phi_k$$

Zobrazení $P$ se nazývá projekce. Není těžké nahlédnout (ověřte si sami), že $P$ má tyto vlastnosti:

(1) $P(H) = H_m$

(2) $P^2 = P$ (této vlastnosti se říká IDEMPOTENCE)

(3) $z = P(f) \iff z \in H_m$ a $(f - z, y) = 0 \ \forall y \in H_m$




ORTOGONALITA

(4) $\|f\|_H^2 = \|f - P(f)\|_H^2 + \|P(f)\|_H^2$ (Pythagorova věta)

Také pozorujeme, že $H_m$ má tyto vlastnosti (OPĚT OVĚŘTE!):

$H_m$ je PODPROSTOR: (i) $H_m \subset H$

(ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in H_m \Rightarrow \alpha f + \beta g \in H_m$

$H_m$ je UZAVŘENÝ: (iii) $f^m \in H_m$ a $f^m \to f$ v $H \Rightarrow f \in H_m$

Nyní si ukážeme, že existují podprostory nekonečné dimenze (některé uzavřené jiné nejsou naopak uzavřené), a pokud jsou uzavřené pak existují jednoznačně definované projekce, které splňují výše uvedené vlastnosti (1)-(4).

(H má uzavř. podprostory)

**Def. (uzavřeného podprostoru)** Řekneme, že $M$ je uzavřený podprostor v $H$ $\equiv$

$\boxed{M \subset\subset H}$ symbolicky

$$\begin{cases} (\alpha)\ M \subset H \\ \text{LINEARITA } (\beta)\ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C})(\forall u, v \in M)(\alpha u + \beta v \in M) \\ \text{UZAVŘENOST } (\gamma)\ \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \text{ a } u_n \to u \text{ v } H \Rightarrow u \in M \end{cases}$$

Příklad (uzavřeného podprostoru nekonečné dimenze). Buď $H = L^2(\Omega)$. Definujme $M := \{u \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega u\,dx = 0\}$. Předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená, otevřená!

Ověřte si, že takto definované $M$ je lineární prostor (splňuje $(\alpha)$ a $(\beta)$). Navíc $M \subsetneqq H$ (neboť existují $L^2$-integrovatelné funkce s nenulovým průměrem) a $\dim M = \infty$ (neboť podmínka na nulový průměr je podmínka jiné normalizace. Lze si tedy představit, že k libovolnému spočetnému systému $\{\psi_l\}_{l=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ lze sestrojit systém $\{\tilde{\psi}_l\}_{l=1}^{\infty} \subset M$ a to tak, že

$$\tilde{\psi}_l := \psi_l - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \psi_l . \quad \left(\Rightarrow \int_\Omega \tilde{\psi}_l = 0\right)$$

Zbývá ověřit uzavřenost. Pokud $\{u^n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ a $u^n \to u$ v $L^2(\Omega)$ pak $u \in L^2(\Omega)$ a $\int u(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int u^n(x)\,dx = 0$

neboť

$$\left|\int_\Omega u\,dx\right| = \left|\int_\Omega (u^n - u)\,dx\right| \leq \int |u^n - u|\,dx \leq \|u^n - u\|_2 |\Omega|^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Hölder

---

Příklad (ukazující, že existují podprostory $\infty$-dimenze, které nejsou uzavřené.)

Definujme

$$M := \{c \in l_2;\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } c_n = 0 \text{ pro každé } n > n_0\}.$$

Pak $M$ je lineární podprostor v $l_2$, ale není uzavřený neboť

$$c_1 := \{1, 0, 0, \dots\} \in M$$
$$c_2 := \{1, \tfrac{1}{2}, \dots\} \in M$$
$$\vdots$$
$$c_n := \{1, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0 \dots\} \in M$$

, ale $\lim_{n\to\infty} c_n = \underbrace{(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \dots)}_{= c} \in l_2 \setminus M$.

tedy $c_n \to c$ v $l_2$

ale $c \notin M$.

$\boxed{\text{Věta 7.7}}$ (O ortogonální projekci H na uzavřený podprostor)

Buď $H$ Hilbertův a $M \subset\subset H$ uzavřený podprostor. Potom

$$(\forall f\in H)(\exists!\, f_M\in M)\ \|f-f_M\|_H = \inf_{z\in M}\|f-z\|_H .$$

Navíc, zobrazení $P: H \to M$ definované předpisem $P(f)=f_M$ splňuje:
(1) $P(H)=M$
(2) $P^2=P$
(3) $z=P(f) \iff z\in M$ a $(f-z,y)=0$ pro $\forall y\in M$
(4) $\|f\|_H^2 = \|P-P(f)\|_H^2 + \|P(f)\|_H^2 \quad (\forall f\in H)$.

Dk $\boxed{\text{[1] Konstrukce (existence) } f_M}$ Buď $\delta = \inf_{z\in M}\|f-z\|_H$ pro dané (libovolné) $f\in H$. Z definice infima plyne existence $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$ tak, že $\|f-z_n\|_H \to \delta$ $(n\to\infty)$.
Protože $\|z_n-z_m\|_H = \|z_n-f+f-z_m\|_H \le \varepsilon$, neboť $\{f-z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchy, tak existuje $z^*\in H$ tak, že $z_n\to z^*$ v $H$, ale $M$ je uzavřený tak, že $z^*\in M$. Navíc $\|f-z_m\|_H \to \|f-z^*\|_H$. Tedy $\|f-z^*\|_H=\delta$.
Hledané $\boxed{f_M = z^*.}$ a $P: f\mapsto f_M$.

$\boxed{\text{[2] Vlastnosti (1)-(4)}}$ Vlastnosti (1), (2) rozmyslete sami.
Ověříme (3) $\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $z=P(f)$, pak určitě $z\in M$. Navíc pro $y\in M$ libovolné a $\alpha\in\mathbb{R}$ libovolné definujme

$$\phi(\alpha) := \|f-(z+\alpha y)\|_H^2 .$$

Víme, že $\phi$ nabývá v $\alpha=0$ minima. Protože

$$\phi(\alpha) = \|f-z\|_H^2 + 2\alpha(f-z,y) + \alpha^2\|y\|_H^2 ,$$

tak podmínka $\phi'(\alpha)=0$ implikuje $(f-z,y)=0$, což jsme chtěli ověřit.

$\boxed{\Leftarrow}$ Naopak, buď $z\in M$ takové, že $(f-z,y)=0$ $\forall y\in M$.
Buď $\tilde{y}\in M$ libovolné. Pak

$$\|f-\tilde{y}\|_H^2 = \|f-z+z-\tilde{y}\|_H^2 = \|f-z\|_H^2 + \|z-\tilde{y}\|_H^2 \ge \|f-z\|_H^2$$

tedy $z=f_M=P(f)$.

$\boxed{\text{[3] Jednoznačnost}}$ Nechť existuje $f\in H$ tak, že $f_M^1$ a $f_M^2$ minimalizují vzdálenost a $f_M^1\neq f_M^2$. ($\|f-f_M^1\|_H = \|f-f_M^2\|_H$)
Pak $\left.\begin{array}{l}(f-f_M^1,y)=0 \ \forall y\in M\\ (f-f_M^2,y)=0 \ \forall y\in M\end{array}\right\}$ a tedy $(f_M^1-f_M^2,y)=0$ $\forall y\in M$

Volbou $y=f_M^1-f_M^2$, dostáváme $\|f_M^1-f_M^2\|_H^2=0$

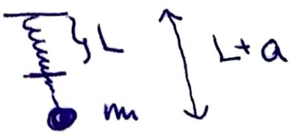
což je $\lightning \wedge f_M^1\neq f_M^2$ ☐

## $\boxed{7.1.5.}$ Fourierovy řady a analýza periodických vibrací *)

V této kapitolce se pokusíme odpovědět na otázku proč jsou Fourierovy řady tak důležité v mnoha odvětvích jako jsou např. vedení tepla, vibrace tyčí, membrán a mechanických systémů, elektrické obvody atd. Důvodem je, že základním matematickým modelem ve všech těchto situacích je rovnice ve (nejprve redukovaném, přesto podobujícím) tvaru

$$(R)\qquad y'' + \alpha y' + \varrho^2 y = p(t).$$

NAPŘ. V mechanice (R) popisuje kmitající pružinu s $m = 1$ či $\varrho^2 = \frac{E}{m}$, $\alpha = \frac{b}{m} > 0$




$\vec{F}_{elas}$! $\vec{F}_{gravitace}$ $\vec{F}_{pokles}$

$m\vec{a} = \vec{F} = mg - E(y+a) - b\frac{dy}{dt} + p(t)$

$\vec{F}_{exter}$! (vnější oscilace)

Rce (R) je • lineární a • má konstantní vlastnosti $(\alpha, \varrho)$ se nemění s časem

Za těchto dvou podmínek lze využít Fourierovy řady (Fourierovu analýzu).

$p(t)$ ... vstup $\qquad y(t)$ ... řešení (výstup)

Dvě základní vlastnosti (R) lze v naší situaci testovat následujícím experimentem: Uvažujme $p$ ve tvaru

$$p(t) = A \sin \omega t \quad \text{nebo} \quad p(t) = A e^{i\omega t}$$

(pak ODR (R) rozštěpíme mezi dva problémy: reálná část + imag. část)

Hledejme řešení ve tvaru $y(t) = B e^{i\omega t}$.

Po dosazení $B(\varrho^2 - \omega^2 + i\alpha\omega) = A$, což implikuje

$$B = A\frac{(\varrho^2-\omega^2) - i\alpha\omega}{(\varrho^2-\omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2} = ACe^{-i\phi} \quad \text{(zápis v polárním tvaru)}$$

kde $$C = \frac{1}{\sqrt{(\varrho^2-\omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}} \quad \text{a} \quad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{\alpha\omega}{\varrho^2-\omega^2}.$$

---

*) dle knihy: „Cornelius Lanczos: Discourse on Fourier series"

Tedy v uvažovaném případě:

(K) $\boxed{\text{VSTUP } p(t) = A\sin\omega t \quad \text{vyplývá} \quad \text{VÝSTUP } y(t) = AC\sin(\omega t - \phi)}$

Poznamenejme, že „výstup k sinusoidálnímu vstupu je opět sinusoidální se stejnou frekvencí, ale modifikovanou amplitudou a modifikovanou fází."

Skutečnost, že frekvence zůstane stejná plyne z linearity a koeficienty $\alpha$ a $k$ v (R) konstantní. Pokud jedna z těchto podmínek neplatí, neplatí ani vztah (K).

Nabízí se otázka: Je vlastnost (K) rovnice (R) důležitá?

Nyní přichází význam Fourierova objevu:

Uvažujme $p = p(t)$ na intervalu $(0,T)$. Pak „Fourierova teorie" říká, že

$$p(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \dots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \dots$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Tedy stačí znát výstupy pro speciální vstupní funkce $e^{ik\omega t}$. Samozřejmě je však třeba znát $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$,

což Fourier udělal:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos k\omega t\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\sin k\omega t\, dt.$$

## 7.2 BODOVÁ KONVERGENCE FOURIEROVÝCH ŘAD

Z abstraktní teorie Fourierových řad víme, že pro $f \in L^2((0,2\pi))$, $2\pi$-periodickou platí:

(1) $$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \text{ kde } \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt \, dt$$

Obdobně pro $f \in L^2((a,a+l))$, $l$-periodickou máme

(1') $$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2\pi k}{l}x, \text{ kde } \quad a_k = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(t)\cos\frac{2\pi k}{l}t \, dt, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(t)\sin\frac{2\pi k}{l}t \, dt$$

*) V minulé přednášce jsme naznačili jeden z přístupů, jak ukázat úplnost ortonormálního systému
$$\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k\in\mathbb{N}} \quad ~~v~~ \quad L^2((0,2\pi)).$$

Pokud tedy víme, že $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ je úplný ortonormální systém v $L^2((0,2\pi))$, pak dle Věty 7.4 máme:

(a) Vlnovku "$\sim$" lze ve výrazu (1) "$=$ s.v. v $(0,2\pi)$"

tj. rovnost skoro všude v $(0,2\pi)$.

(b) Parsevalovu rovnost, která říká, že (srovnej s Příkladem na straně 7/6)
$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|\tilde{a}_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{b}_k|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

(c) existenci vybrané podposloupnosti $\{S_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{S_n\}$ tak, že

(2) $$S_{n_j} \to f \quad \text{s.v. v } (0,2\pi)$$

(plyne z první Riesz-Fischerovy věty a ~~z~~ Věty 7.4(iii)).

*) Není součástí testu pozadavek.

Vlastnost (2) se dá v případě Fourierových řad neslibit.
Platí totiž Carlesonova*) věta:

Pro $\forall f \in L^2((0,2\pi))$ : $s_n(x) \to f(x)$ pro s.v. $x \in (0,2\pi)$

Tedy nejen vybraná, ale celá posloupnost $\{s_n\}$ konvergují ve skoro všech bodech k $f$; (je-li $f \in L^2((0,2\pi))$).

Protože jsem vás vždy nepřesvědčil (vzhledem k nemožnosti dokázat na daném stupni našich znalostí všechna podstatná tvrzení), pokusíme se dnes ukázat úplnost systému $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ v $L^2((0,2\pi))$ jinak, a to pomocí ekvivalence (iv) a (i) ve Větě 7.4.

(jsou na úplnosti systému $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ založena)

Ještě dříve si však dokážeme dvě tvrzení, která a které[2] se nejčastěji hodí pro počítání Fourierových řad a ověření jejich konvergenčních vlastností.

$\boxed{\text{Věta}}\ \boxed{7.7}\ \boxed{(1)}$ Nechť $f$ je $2\pi$-periodická, spojitá funkce, která je po částech spojitě diferencovatelná (tzn. $\exists$ konečné $\{a_i\}_{i=0}^m$ taková, že $0=a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = 2\pi$ a $f' \in C((a_i, a_{i+1}))$ pro každé $i = 0, \dots, m-1$ a $f'$ má v $a_i$ vlastní jednostranné limity). Potom

- $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty$
- $s_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$ $\left( s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$

---

*) Lenart CARLESON 1966, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. 116, pp. 135-157.

(2) Buď $f$ $2\pi$-periodické, $f \in C^k(\mathbb{R})$ a $f^{(k+1)}$ po částech spojitě diferencovatelné. Potom

- $\sum_{m=1}^{\infty} m^s (|a_m| + |b_m|) < +\infty$ pro $s = 0, 1, \dots, k$
- Fourierovu řadu lze $k$-krát derivovat člen po členu a tyto řady konvergují k $f^{(s)}$ stejnoměrně pro $s = 0, 1, \dots, k$.

Dk Ad (1) Vlastnosti $f$ a $f'$ implikují, že $f, f' \in L^2((0, 2\pi))$. ROZMYSLETE PROČ. Dle Besselovy nerovnosti (viz Věta 7.2) Fourierovy koeficienty odpovídající jak $f$ tak $f'$ jsou sčitatelné s druhou mocninou. Symbolicky, pokud

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

a

$$f' \sim \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum \tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx,$$

tak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 < \infty$ a $\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{a}_k|^2 + |\tilde{b}_k|^2 < +\infty$.

Dále, integrací per-partes dostáváme:

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt \, dt = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \underset{\downarrow \atop f'}{f(t)} \underset{\downarrow \atop \frac{\sin kt}{k}}{\cos kt} \, dt$$

$$\overset{\text{per partes}}{=} \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{\left[f(t)\frac{\sin kt}{k}\right]_{a_i}^{a_{i+1}}}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{neboť } f \text{ je spojitá} \\ \text{a } 2\pi\text{-periodická}}} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{m-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\frac{\sin kt}{k} \, dt$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin kt \, dt = -\frac{\tilde{b}_k}{k}$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underset{\downarrow \atop f'(t)}{f(t)} \underset{\searrow -\frac{\cos kt}{k}}{\sin kt} \, dt = \frac{1}{\pi k}\int_0^{2\pi} f'(t)\cos kt \, dt = \frac{\tilde{a}_k}{k}}$$

S použitím odvozeného vztahu dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|\tilde{b}_k| + \frac{1}{k}|\tilde{a}_k| \underset{\text{ROZMYSLI}}{\overset{\text{Hölder}}{\le}}$$

$$\le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{b}_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{a}_k|^2\right)^{1/2}\right]$$

Tak je dokázána první část.

Uvažujme nyní $s_m$ (definované v minulé větě). Pak

$$|s_m| \underset{\substack{|\cos| \le 1 \\ |\sin| \le 1}}{\le} \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{m} |a_k| + \sum_{k=1}^{m} |b_k| \underset{\forall n \in \mathbb{N}}{\le} \frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \underset{\text{dle právě dokázaného}}{<} +\infty$$

Tedy dle Weierstrassovy věty:

$$s_m \rightrightarrows f^* \text{ v } \mathbb{R}. \text{ i v } [0, 2\pi].$$

tzn.

$$\| s_m - f^* \|_\infty \to 0,$$

což implikuje

$$\| s_m - f^* \|_2 \to 0$$

(Připomeň: $\|z\|^2_{L^2(0,2\pi)} \le \|z\|^2_{L^\infty(0,2\pi)} 2\pi$)

Dle Věty 7.4 však (ZDE VYUŽÍVÁME ÚPLNOST $\{1, \cos kx, \sin kx\}$)

$$\| s_n - f \|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

tedy $f = f^*$ s.v.

Navíc $f, f^* \in C(\mathbb{R})$, tedy $f = f^*$ bodově. (Kdyby se lišily v jednom bodě, pak se musí lišit na okolí.)

Tedy $\| s_m - f \|_2 \to 0$ a $s_m \rightrightarrows f$ v $[0, 2\pi]$

a první část věty je dokázána.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Pro $k=0$ je tvrzení dokázáno v první části.

Je-li $k=1$, postupujeme analogicky. Provedeme-li per-partes 2x dostaneme

$$a_k = -\frac{\tilde{\tilde{b}}_k}{k^2} \quad a \quad b_k = -\frac{\tilde{\tilde{a}}_k}{k^2},$$

kde $\tilde{\tilde{a}}_k, \tilde{\tilde{b}}_k$ označují Fourierovy koeficienty z fce $f''$.

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|a_n|+|b_n|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(|\tilde{\tilde{a}}_n| + |\tilde{\tilde{b}}_n|\right)$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{\tilde{a}}_n|^2 + |\tilde{\tilde{b}}_n|^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

ZBYTEK DŮKAZU JE PONECHÁN LASKAVÉMU ČTENÁŘI. ▨

Důležitá je následující věta, ve které oslabíme požadavek na spojitost $f$ v celém $\mathbb{R}$.

**Věta 7.8** Buď $f$ $2\pi$-periodická, po částech spojitá a spojitě diferencovatelná. Potom

$$s_n^f(x) \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \qquad \text{pro } \forall x\in\mathbb{R}$$

Je-li navíc $f$ spojitá na $(A,B)$, pak $s_n^f \rightrightarrows f$ v $\langle\alpha,\beta\rangle \subset (A,B)$.

**Důkaz** provedeme za speciální situace*), kdy bod nespojitosti je jen jeden. Nejdříve uvažujme, že bod nespojitosti je $x=0$ a singularita je odstranitelná, tzn. $f\in C([-\pi,\pi]\setminus\{0\})$, $2\pi$-periodická, a

$$\lim_{x\to 0+} f(x) =: f(0+) = f(0-) := \lim_{x\to 0-} f(x)$$

Definujme

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & x\neq 0\\ f(0+) & x=0\end{cases}. \quad \text{Pak } \tilde f\in C([-\pi,\pi])$$

a dle Věty 7.7. $s_n^{\tilde f}$, které se dle definice rovná $s_n^f$, splňuje

$$s_n^f = s_n^{\tilde f} \rightrightarrows \tilde f \ \text{ v } [-\pi,\pi],$$

což dokazuje tvrzení.

Dále, nechť $x=0$ je jediný bod nespojitosti a $\boxed{f(0+)\neq f(0-)}$.

Položme $\tilde f(x) = f(x) - \frac{1}{2}\big(f(0+)-f(0-)\big)\operatorname{sgn} x$

Pak $\tilde f(0+) = \lim_{x\to 0+}\tilde f(x) = \dfrac{f(0+)+f(0-)}{2} = \lim_{x\to 0-}\tilde f(x) = \tilde f(0-)$

Tedy $\tilde f$ má v 0 odstranitelnou singularitu a platí tedy

$$s_n^{\tilde f}(0) \to \frac{\tilde f(0+)+\tilde f(0-)}{2} = \frac{f(0+)+f(0-)}{2}.$$

Nakonec, je-li $x$ bod nespojitosti libovolný, pak položme $g(s) = f(x+s)$. Potom $s_n^f(x) = s_n^g(0) \to \dfrac{g(0+)+g(0-)}{2} = \dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$. ∎

---

*) Tato situace nám stačí pro praktické použití.

**Příklad** Uvažte fci $\operatorname{sgn} x\big|_{(-\pi,\pi)}$. (1) Najděte její Fourierovu řadu, (2) rozhodněte, ve kterých bodech se F. řada rovná sgn x a pomocí tohoto rozvoje určete součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

**Řešení** $\boxed{\text{Ad } 1}$ $\operatorname{sgn} x\big|_{(-\pi,\pi)} \in L^2((-\pi,\pi))$, lichá. Rozšíříme-li tuto funkci periodicky na $\mathbb{R}$, viz obrázek, pak pro tuto funkci $\operatorname{sgn}_{per}$ platí:

$$\operatorname{sgn}_{per} \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \text{kde} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} t\big|_{(-\pi,\pi)} \sin kt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \, dt = \begin{cases} 0 & k \text{ sudé} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ liché} \end{cases}$$

Pozoruj, že $a_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, neb $\operatorname{sgn}_{per}$ je liché.

Tedy
$$\operatorname{sgn}_{per} \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)} \underbrace{\frac{\sin(2k+1)x}{\sqrt{\pi}}}_{\text{prvek ortonormálního systému}}$$

$\boxed{\text{Ad } 2}$ Dle předchozí věty platí

$$\operatorname{sgn} x\big|_{(-\pi,\pi)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\frac{\sin(2k+1)x}{\sqrt{\pi}} \quad \text{pro } \forall x \in (-\pi,\pi).$$

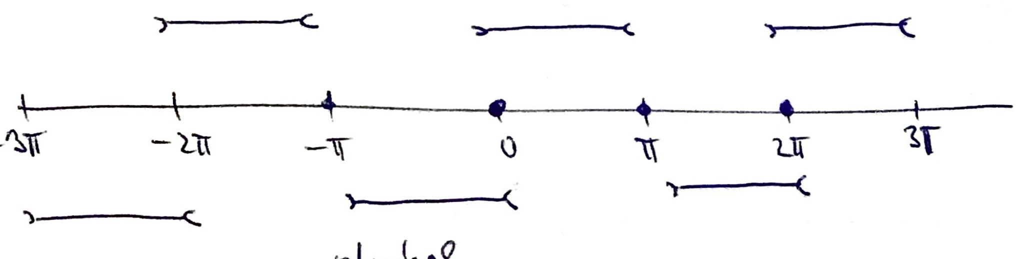
nebo $\boxed{\operatorname{sgn}_{per}(x) = \qquad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}}$

neboť $\operatorname{sgn} 0 = 0 = \frac{\operatorname{sgn}(0+) + \operatorname{sgn}(0-)}{2}$.

$\boxed{\text{Ad } 3}$ Parsevalova rovnost

$$2\pi = \|\operatorname{sgn}\big|_{(-\pi,\pi)}\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Tedy
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$



obrázek.

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.9 (o integraci Fourierových řad člen po členu)

Buď $f$ $2\pi$-periodická, po částech spojitá s Fourierovými koeficienty $a_k, b_k$.

Pak $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x$ je $2\pi$-periodická po částech spojitě diferencovatelná

a $\bar{s}_m \rightrightarrows F$ stejnoměrně v $\langle 0, 2\pi \rangle$,

přičemž

$$\bar{s}_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^x \cos kt\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^x \sin kt\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} [\cos kx - 1]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-b_k}{k}\right) \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k}\right) \sin kx.$$

neboli $\bar{s}_m$ je řada, která vznikla integrací F.ř. funkce $f$ člen po členu.

(Dk) Skutečnost, že $F \in C(\mathbb{R})$ a po částech $C^1$ víme ze minulé školy (viz základní věta dif. a int. počtu). Protože $F(x+2\pi) = F(x)$ (pro $\forall x$), tak $F$ je $2\pi$-periodická. Dle Věty 7.7
(ověř!)

tedy $s_m^F \rightrightarrows F$ v $\langle 0, 2\pi \rangle$, kde $F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$

a $A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos kt\,dt$

a $B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin kt\,dt$.

Dle "per-partesové" v důkazu Věty 7.7 (1):

$$A_k = -\frac{1}{k} b_k \quad \text{a} \quad B_k = \frac{1}{k} a_k$$

Tedy

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k}\right) \cos kx + \left(\frac{a_k}{k}\right) \sin kx.$$

Z vlastnosti $F(0) = 0$, plyne $\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ a tvrzení je dokázáno.

Nyní se vrátíme k otázce úplnosti systému $\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ resp. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ v prostoru $L^2((-\pi,\pi))$.

Nemůžeme využít předchozích vět 7.7–7.9, které byly na úplnost ortogonálních systémů kalorky.

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.10 Systémy $\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ jsou úplné ortonormální systémy v $L^2((-\pi,\pi))$.

Dk: Každou funkci z $L^2(\Omega)$ lze libovolně dobře aproximovat funkcemi z $C^1(\Omega)$ (nebo i hladšími). Tedy: dle Besselovy nerovnosti (Věta 7.2) k takovéto fci $f\in C^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, $\Omega=(-\pi,\pi)$

$$s_m^f=\sum_{k=-m}^{m}(f,\phi_k)\phi_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=-m}^{m}|(f,\phi_k)|^2\le\|f\|_2^2 \quad \text{a} \quad \|s_{m}^f-s_n^f\|_2^2\le\sum_{|k|>m}|(f,\phi_k)|^2\to 0$$

Tedy $s_m^f$ je Cauchy a $\exists f^*$: $s_{m_k}^f\to f^*$ s.v. v $\Omega$ a $\|s_{m_k}^f-f^*\|_2\to 0$.

Dle následující věty 7.11 a následného komentáře,

$$s_m^f\to f \text{ s.v. v } \Omega,$$

tedy $f=f^*$ a $\|s_m^f-f\|_2\to 0$ pro $m\to\infty$.

Tedy dle Věty 7.4 ; (i) $\Leftrightarrow$ (iii) oba systémy jsou úplné.

$\boxed{\text{Q}}$

$\boxed{\text{Věta}}$ 7.11 Buď $f\in L^2_{per}((-\pi,\pi))$ a existují $M$ a $\alpha>0$ takové, že

(L) $$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\le M \quad (\forall |h|\le\alpha)\ (\forall x\in(-\pi,\pi))$$

Pak $S_m^f\to f$ s.v. v $(-\pi,\pi)$.

Poznámka: (L) např. platí pokud $f\in C^1(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Důkaz}}$ (Věty 7.11) Protože $\{\phi_k\}$ jsou ortonormální a $\phi_0$ konstantní, tak platí

$$\underbrace{f(x) = \sum_{|k|\le n} (f(x), \phi_k)\phi_k}.$$

Rovněž platí:

$$s_n^f(x) - f(x) = \sum_{|k|\le n} (f - f(x), \phi_k)\phi_k$$

$$= \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(y) - f(x)) e^{-iky}\, dy \; e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(y)-f(x)) \sum_{|k|\le n} e^{ik(x-y)}\, dy$$

periodicita

$$\underset{\substack{z = x-y\\ dz = -dy}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-z) - f(x)) \sum_{|k|\le n} e^{ikz}\, dz$$

Protože

$$\sum_{|k|\le n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx}\frac{1-e^{ix(2n+1)}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{ix(n+\frac{1}{2})} - e^{-ix(n+\frac{1}{2})}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

tak

$$s_n^f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-z) - f(x)}{\sin\frac{z}{2}} \sin (2n+1)\frac{z}{2}\, dz$$

$$\underset{\substack{z = 2y\\ dz = 2dy}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(x-2y) - f(x)}{2y}\, \frac{2y}{\sin y} \sin (2n+1)y\, dy$$

Tedy $s_n^f(x) - f(x)$ lze nahlížet jako $(2n+1)$-ní koeficient Fourierovy řady fce $g(y) = \frac{f(x-2y)-f(x)}{2y}\,\frac{2y}{\sin y}\,\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$, která patří do $L^2((-\pi,\pi))$ a dle Besselovy nerovnosti (Věta 7.2)

$$(g, \phi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Tedy $s_n^f(x) - f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ všude v $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

# Závěrečné poznámky, Gibbsův jev a integrální reprezentace $S_m^f$

Fourierovy řady dané vztahy (1) resp. (1') mají smysl také pro $f \in L^1((0,2\pi))$ resp. $f \in L^1((a,a+l))$.

Připomeň, že $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ pro $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^d$ omez.

Matematická komunita se zabývala otázkou bodové konvergence F. řad pro $f \in L^1((0,2\pi))$. Výsledky jsou pozoruhodné:

(1) $\exists f \in L^1((-\pi,\pi))$ tak, že F. řada $f$ diverguje pro $\forall x \in (-\pi,\pi)$.

(2) $\exists$ spojitá funkce $\in L^1(-\pi,\pi)$ tak, že F. ř. diverguje na husté podmnožině $v$ $(-\pi,\pi)$.

(3) Je-li $f \in L^1((0,2\pi))$, $2\pi$-periodická.

Pro $x \in \langle 0,2\pi)$ označme

$$g(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \quad \text{a} \quad s(x) = \lim_{t\to 0+} g(t) \text{ pokud tato limita existuje}$$

Platí:

JORDANOVO KRITÉRIUM
(a) Je-li $f$ funkce s omezenou variací na $\langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$ (tzn. $\exists M>0$ $\sup_{D} \sum_{i=1}^{N_D} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \le M$) pro jisté $\delta>0$. Pak
- $s(x)$ existuje
- F. ř. konverguje k $s(x)$

DINIHO KRITÉRIUM.
(b) Jestliže $s(x)$ existuje a $\int_0^\delta \frac{g(t)-s(x)}{t}\,dt < +\infty$ pro jisté $\delta \in (0,\pi)$, pak
- F. ř. $f$ v bodě $x$ konverguje k $s(x)$.

(4) Platí <u>Lebesgue-Riemannovo lemma</u>:

Buď $f \in L^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$. Pak pro $\forall \beta \in \mathbb{R}$

(*) $\lim \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta) = 0$

Speciálně:

$\beta = 0, \alpha = k$ $\quad \int_I f(t) \sin kt \, dt \to 0$

$\beta = \frac{\pi}{2}, \alpha = k$ $\quad \int_I f(t) \cos kt \, dt \to 0$

mj. <u>slabé konvergence</u>

$\sin kt \xrightarrow{*} 0$ v $L^2(I)$

$\cos kt \to 0$ v $L^2(I)$

(Dk) každou $f \in L^1$, lze rozložit $f = f^+ - f^-$, $f^+, f^-$ jsou limitou jednoduchých fcí, a základem jednoduché funkce je charakteristická funkce.

Je-li $f = \chi_I$, pak

$$\int_{I=(A,B)} \sin(\alpha t + \beta) \, dt = \left[ \frac{\cos(\alpha t + \beta)}{\alpha} \right]_A^B \leq \frac{2}{\alpha} \to 0 \quad \alpha \to \infty.$$

□

$\boxed{\text{Gibbsův jev}}$ referuje ke špatnému chování $n$-tých částečných součtů v blízkosti skokových singularit.
Situaci si ilustrujeme na funkci $\operatorname{sgn} x$ na $(-\pi, \pi)$.
Dle Příkladu na str 7/23 víme, že platí:

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)x}{2k+1}$$

Označíme-li

$$S_n(x) := \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin (2k+1)x}{2k+1},$$

pak derivace $S_n'(x)$ splňuje

$$S_n'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos (2k+1)x = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left[ e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kx} \right] \qquad q = e^{i2x}$$

$$= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1 - e^{i2nx}}{1 - e^{i2x}} e^{ix} \right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{(e^{inx} - e^{-inx})(e^{inx})}{(e^{ix} - e^{-ix})} \right]$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{\sin nx \cos nx}{\sin x} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x}.$$

Funkce $\underline{S_n}$ tedy $\underline{\text{má kritické body}}$ v $x_j = j \frac{\pi}{2n}$ $j = 0, 1, \dots$
V těchto bodech máme

$$S_n\left(j \frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin (2k+1) \frac{j\pi}{2n}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{n} \frac{\sin (2k+1) \frac{j\pi}{2n}}{(2k+1)\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) \qquad \text{kde } f(t) = \frac{\sin jt}{\sin t}$$

$$x_{k+1} = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$$

$$x_k = (2k-1)\frac{\pi}{2n}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{n}$$

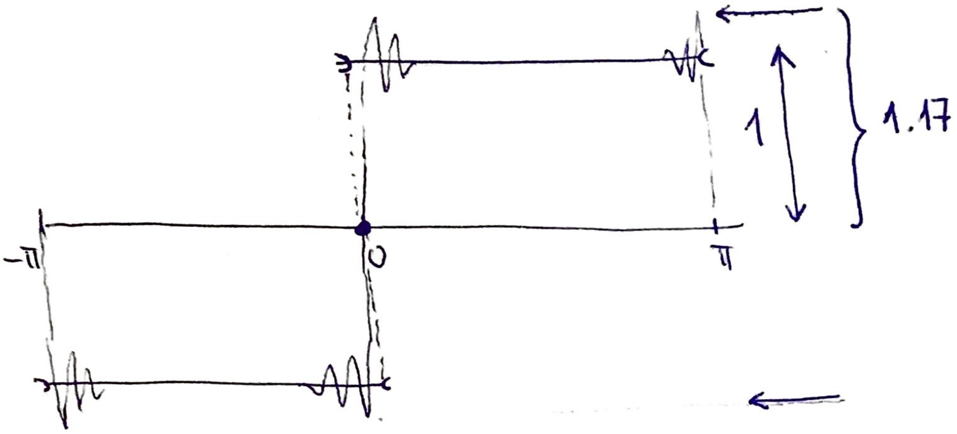
$$\approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin jt}{t} \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi j} \frac{\sin s}{s} \, ds$$

$jt = s$
$j\,dt = ds$

a $S_n$ nabývá největšího maxima v $j = 1$,

kde $\boxed{S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \doteq 1.1790 \quad \text{pro KAŽDÉ } n \in \mathbb{N}}$ viz OBRÁZEK




$\boxed{\text{OBR.}}$ V blízkosti bodů nespojitosti $(x=0, x=\pm\pi, \dots)$ dochází u $n$-tých částečných součtů $S_n^f$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$, k přestřelení (overshoot) velikosti skoku: místo skoku velikosti 2 dostáváme v maximálních bodech ($x^n_{max}=\frac{\pi}{2n}$, $x^n_{min}=-\frac{\pi}{2n}$) rozdíl 2.3580.
Toto je obecný nedostatek ortonormálních systémů (např. Čebyševovy polynomy aj.), že u nich dochází k přestřelení a oscilacím v blízkosti bodů nespojitosti typu skok.

Gibbsovu jevu se lze vyhnout zkoumáním (uvažováním) tzv. Cesarovských součtů $\sigma_n^f$ definovaných vztahem

$$\sigma_n^f(x) = \frac{S_1^f(x) + \dots + S_n^f(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k^f(x)$$

(aritmetický průměr prvních $n$ částečných součtů F. řady)

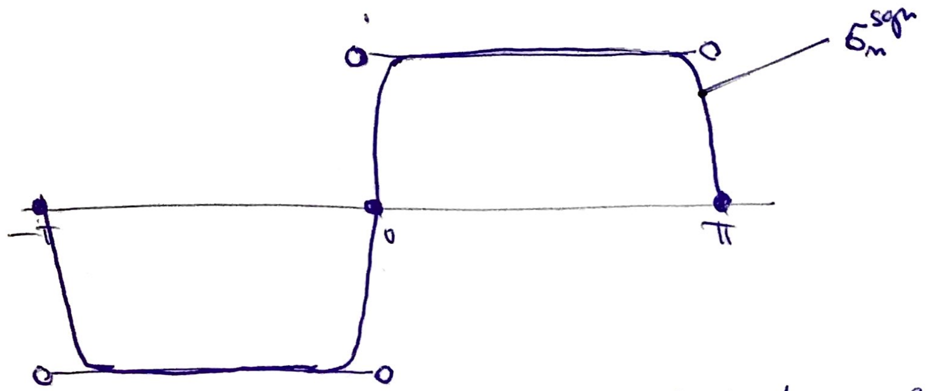
$\boxed{\text{Věta}}$ 7.12 (Fejérova) Buď $f \in L^1(\langle 0,2\pi))$, $2\pi$-periodická.
Pokud $\frac{f(x+)+f(x-)}{2} \overset{\text{ozn.}}{:=} \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ existují,

pak $\sigma_n^f(x) \longrightarrow \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$

Pokud je navíc $f$ spojitá na $\langle 0,2\pi\rangle$,

pak $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ stejnoměrně na $\langle 0,2\pi\rangle$.

Větu dokazovat nebudeme.
Následující obrázek ilustruje jak $\sigma_n^f$ aproximují $\mathrm{sgn}|_{(-\pi,\pi)}$.




OBR. Cesarovské součty oscilace ani přestřelení nevykazují. Ty jsou aritmetickými průměry $s_k^{sgn}$ posloupnosti.

---

**INTEGRÁLNÍ REPREZENTACE $s_m^f$**

Postupujeme-li podobně jako v důkazu Věty 7.11, dostáváme:

$$s_m^f(x) = \sum_{|k|\le m} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-ik\xi}\, d\xi}_{c_k = (f,\varphi_k)}\, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sum_{k=-m}^{m} e^{-ik(\xi-x)}\, d\xi$$

POSTUPUJEME STEJNĚ JAKO V DŮKAZU VĚTY 7.11.

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, D_m(x-\xi) \qquad \text{kde } D_m(x-\xi) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)(x-\xi)\right)}{\sin\frac{x-\xi}{2}}}_{\text{Dirichletovo jádro}}$$

$$=: (f * D_m)(x),$$

kde jsme využili označení pro konvoluci dvou funkcí.

Def. Buď $f,g : \Omega \to \mathbb{R}$ takové, že $\int_\Omega f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi$ má smysl pro $\forall x \in \Omega$ (skoro každé $x \in \Omega$). Pak

$$(f*g)(x) \equiv \int_\Omega f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi$$

se nazývá KONVOLUCE $f$ a $g$ (kde $g$ má roli tzv. konvolučního jádra)

Jádro $D_m(x-\xi)$ je symetrické kolem bodu $x$, oscilující více v blízkosti $x$, a platí $\lim_{x\to\xi} D_m(x-\xi) = \frac{m+1}{\sqrt{2\pi}}$ (SNADNO OVĚŘITE) a ve smyslu distribucí $D_m(x-\xi) \longrightarrow \delta(x-\xi)$ (Diracova distribuce posun. v $\xi = x$)

Odsud lze intuitivně očekávat, že na $s_m^f(x)$ má vliv jen symetrické chování $f$ blízko $x$, tedy $s_m^f(x) \longrightarrow \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.