Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

obor hodnot

[8] 1.
- Zformulujte tvrzení o derivování podílu dvou funkcí g, h v bodě x intervalu (a, b).
- Buď $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ daná prostá funkce, zobrazující (a, b) na $(A, B) \subset \mathbb{R}$. Uveďte definici funkce f^{-1}, inverzní funkce k funkci f (samozřejmě včetně definičního oboru a oboru hodnot).
- Uveďte definici funkce cotg (kotangens) a výčet jejích vlastností: definiční obor, spojitost, monotónii a vzoreček pro derivaci, vše s krátkým vysvětlením, odkud tyto vlastnosti plynou.
- Uvažujte funkci cotg zúženou na interval $(0, \pi)$. Vysvětlete, proč k této funkci existuje funkce inverzní, označme ji, jak je zvykem, $\operatorname{arccotg} := (\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)})^{-1}$.
- Zformulujte přesně větu o spojitosti a derivování inverzní funkce (včetně vzorečku pro derivaci f^{-1}), ve tvaru vhodném pro výpočet (odvození) vzorečku pro funkci arccotg. K zjednodušení by měl stačit vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Řeš. • Nechť $\underbrace{g'(x) \text{ a } h'(x) \text{ existují}}_{0.5}$ a $\underbrace{g(x) \neq 0}_{0.5}$. Pak $\underbrace{\left(\frac{h}{g}\right)'(x) = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{g^2(x)}}_{0.5}$

1.5

• Pro výše uvedenou f je $f^{-1} : (A,B) \xrightarrow[\text{[0.5]}]{\text{na}} (a,b)$ prostě dané předpisem

1.5

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \qquad 1$$

• $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 0.5. Protože $\cos, \sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$ (důsledek vět o ...) a $\sin x = 0 \iff x \in \{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$

2

0.5 tak $D_{\operatorname{cotg} x} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$, $\underbrace{\operatorname{cotg} x \in C(D_{\operatorname{cotg}})}_{0.5}$

a protože $\lim_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$ a $\lim_{x\to\pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$

tak dle Darbouxovy věty $\boxed{H_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R}}$, 0.5

$\underbrace{(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}}_{0.5} < 0 \Rightarrow \operatorname{cotg} x$ klesající na $(k\pi, (k+1)\pi)$

0.5

• arccotg: $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0,\pi)$ klesající, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} = \pi-$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0+$

1

$(\operatorname{arccotg} x)' = -\sin^2(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{\sin^2}{\sin^2 + \cos^2}\Big|_{\operatorname{arccotg} x} = -\frac{1}{1+x^2}$

1,5 • Věta Nechť $f : (a,b) \xrightarrow{\text{na}} (A,B)$ takové, že $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$, pak $f^{-1} : (A,B) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ prostě existuje a platí $f^{-1} \in C((A,B))$

$$[f^{-1}]'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y = f^{-1}(x)}}$$

[8] 2.

- Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Naznačte hlavní ideu důkazu. [3]
- Lze použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkci $x^2|x|$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$? Zdůvodněte. Nakreslete pečlivý náčrtek situace. [3]
- Zadefinujte pro $f : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ jednostrannou derivaci $f'(a+)$ a předpokládejte, že $f'(x)$ existují pro $x \in (a, b)$. Uveďte podmínku na funkci f, která stačí k tomu, aby platilo [1]

$$f'(a+) = \lim_{x \to a+} f'(x). \qquad (1)$$

[1]

- Tvrzení zaručující platnost (1) zformulujte a dokažte.

Řešení [2]

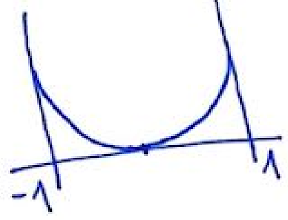
- LVOSH $\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \in C(\langle a,b\rangle) \\ \cdot\ f'(x) \text{ existuje } \forall x \in (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b):\ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- Funkce [1] $g(x) = x^2|x|$ je sudá, spojitá na $\langle -1,1\rangle$ a splňuje $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{na } (0,+\infty) \\ -x^3 & \text{na } (-\infty,0) \end{cases}$

$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 3x^2 \\ -3x^2 \end{cases}$ a dle definice a věty o jednostranné derivaci $g'(0+) = g'(0-) = 0$.

[1] Tedy $g \in C(\langle -1,1\rangle)$ a $g'(x) \in C((-1,1)) \Rightarrow$ LVOSH lze použít

[1] Náčrtek: Bod 0 je bod ξ z LVOSH.



Spojitost f v bodě a ← [1]

- Platí $f \in C(\langle a, a+\delta))$, $f'(x)$ existuje v $(a, a+\delta)$ $\Rightarrow f'(a+) := \lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a+} f'(x)$.

Dk na $\langle a, a+\frac{\delta}{2}\rangle$: f splňuje předpoklady LVOSH.

[1] Tedy

$* \quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_x)$ pro jisté $\xi_x \in (a,x)$

Pokud $x \to a+$ pak $\xi_x \to a+$, což dává důkaz.

[1] · Idea důkazu LVOSH: Převedu na Rolleovu větu, která plyne z nutné podmínky existence (globálních) extrémů uvnitř (a,b) tak, že zavedu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

[8] 3. Rozhodněte, zda platí tyto ekvivalence (pokud platí nějaká implikace, tak ji dokažte, pokud si myslíte, že neplatí, uveďte protipříklad):

1. Funkce f má v $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $\iff$ existuje $P_\delta(x_0)$ na kterém je f omezená.
2. $f'(x_0) \leq 0$ pro všechna $x_0 \in (a,b)$ $\iff$ f je v (a,b) nerostoucí.
3. Funkce f má v $x_0 \in (a,b)$ lokální minimum a $f'(x_0)$ existuje $\iff$ $f'(x_0) = 0$.

Součástí řešení jsou i definice pojmů, které se ve výše uvedených tvrzeních vyskytují.

Řešení!

[0.5]. f má v $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu (vlastní) $\stackrel{\text{def.}}{\equiv} \exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta(x_0)\ |f(x) - A| < \varepsilon$

[0.5]. f je na $P_\delta(x_0)$ omezená $\equiv \exists M > 0\ \forall x \in P_\delta(x_0)\ |f(x)| \leq M$.

[0.5]. f je v (a,b) nerostoucí $\equiv \forall x, y \in (a,b): x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

[0.5]. $f'(x_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ exist.

[0.5]. f má v $x_0 \in (a,b)$ lok. minim $\equiv \exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta(x_0)\ f(x_0) \geq f(x_0)$.

$\boxed{\text{Ad (1)}}$ $\boxed{\Rightarrow}$ Platí pokud je limita vlastní ($A \in \mathbb{R}$). Pak platí

0.5 $|f(x)| = |f(x) - A + A| < |f(x) - A| + |A|$

1 a z definice vlastní limity & $\varepsilon = 1$ najdu δ tak, že $\forall x \in P_\delta(x_0)$

$|f(x)| < |A| + 1 \stackrel{\text{def.}}{=} M$.

Je-li $A = \pm\infty$, tvrzení neplatí.

0.5 $\boxed{\Leftarrow}$ Neplatí. např. $\operatorname{sgn} x$ u 0, $\sin \frac{1}{x}$ u 0, Dirichletova fce kdekoliv.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ $\boxed{\Rightarrow}$ platí volba pro lib. $x < y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \stackrel{\text{LVOSH}}{=} f'(\xi_{xy}) \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

1

$\boxed{\Leftarrow}$ Platí pokud $f'(x_0)$ existuje pro $\forall x_0 \in (a,b)$, což plyne z limitního přechodu v: $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 0$ platící pro $\forall x, y \in (a,b)$

1 pro $x \to y$ $f'(y) \leq 0$ (Musí však derivace existovat)

Jinak neplatí:

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ $\boxed{\Rightarrow}$ platí $f'(x_0+) = \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0$ a $f'(x_0-) = \lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{(x - x_0)}_{< 0}} \leq 0$

1 ale $f'(x_0)$ ex. a nutně $f'(x_0) = \underset{\geq 0}{f'(x_0+)} = \underset{\leq 0}{f'(x_0-)} = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ 0.5 Neplatí např. $f(x) = x^3$ v bodě 0.