

NMFM332 – Statistika pro finanční matematiky 2

Markovské řetězce II

Cvičenie 8 | 24.04.2023

Příklad 1:

Spočtete autokovarianční funkci MA(2) procesu daného rovnicí

$$X_t = \varepsilon_t + 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.7\varepsilon_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum.

Příklad 2:

Spočtete autokovarianční funkci MA(3) procesu daného rovnicí

$$X_t = 0.5\varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum.

Příklad 3:

Spočtete autokovarianční funkci MA(4) procesu daného rovnicí

$$X_t = 0.3\varepsilon_t - 0.3\varepsilon_{t-2} - 0.3\varepsilon_{t-4}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum.

Příklad 4:

Spočítejte autokovarianční funkci AR(1) procesu daného rovnicí

$$X_t - 0.7X_{t-1} = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum. Vyjádřete X_t jako kauzální lineární proces.

Příklad 5:

Pomocí Yule-Walkerových rovnic spočítejte autokovarianční funkci AR(2) procesu daného rovnicí

$$X_t - 0.7X_{t-1} + 0.1X_{t-2} = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum. Vyjádřete X_t jako kauzální lineární proces.

Příklad 6:

Pomocí Yule-Walkerových rovnic spočítejte autokovarianční funkci AR(2) procesu daného rovnicí

$$X_t - 0.4X_{t-1} + 0.04X_{t-2} = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum. Vyjádřete X_t jako kauzální lineární proces.

Příklad 7: Uvažujme model AR(1,1) definovaný obecnou rovnicí

$$X_t + aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{Z}$ a $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ je bílý šum.

- Definujte podmínky, při kterých je ARMA proces slabě stacionární.
- Pokud existuje, najděte kauzální vyjádření daného ARMA procesu a spočtete autokovarianční a autokorelační funkci procesu.

Příklad 8: Uvažujme AR(2,1) proces definovaný rovnicí

$$X_t - 0.5X_{t-1} + 0.04X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.25\varepsilon_{t-1},$$

pro $t \in \mathbb{Z}$ a $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ bílí šum. Nайдěte kauzální vyjádření procesu a spočtete jeho autokovarianční a autokorelační funkci. Je tento ARMA(2,1) proces invertibilní?

Domácí úloha

Deadline: 15.05.2023

V souboru casrady.csv jsou uloženy tři realizace časové řady délky 100. Byly generovány podle následujících modelů:

- bílý šum s nulovou střední hodnotou a kladným rozptylem σ^2 ,
- AR(1), to jest model $X_t = aX_{t-1} + Y_t$,
- MA(1), to jest model $X_t = Y_t + bY_{t-1}$.

Vaším úkolem je:

- Spočítat odhady autokovariančních funkcí pro tyto posloupnosti (a rozdíly v časech například do velikosti 10) a vykreslit do grafu.
- Na základě odhadů autokovariančních (nebo ještě lépe autokorelačních) funkcí určit, která posloupnost odpovídá kterému modelu.
- Pro řadu odpovídající bílému šumu odhadnout jeho rozptyl σ^2 .
- Pomocí metody Yule-Walkerových rovnic a odhadnutých autokovariančních funkcí odhadnout koeficient $a \in \mathbb{R}$ pro řadu z modelu AR(1) a také odhadnout rozptyl bílého šumu $\{Y_t\}_{t=1}^{100}$.
- Pro všechny 3 řady spočítat lineární předpověď pro X_{101} na základě pozorování X_{100} a na základě pozorování X_{100} a X_{99} , podle postupu z přednášky a pomocí odhadnutých autokovariančních funkcí.