NMFM332 – Statistika pro finanční matematiky 2

Diferenciální rovnice a modely růstu

Cvičenie 3 | 13.03.2023

Příklad 1: Řešte diferenciální rovnici pro neznáme parametry $a, k > 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

Příklad 2: Ukažte, že logistická křivka je symetrická podle inflexního bodu.

Příklad 3: Ověřte, že $y(t) = k\exp(b\mathrm{e}^{-at})$ je řešením diferenciální rovnice pro $a, k > 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ay\ln(y/k)$$

Příklad 4: Určete saturační úroveň Gompertzovy křivky a její inflexní bod. Je Gompertzova křivka symetrická kolem inflexního bodu?

Příklad 5: Jak byste proložili daty exponenciální křivku

$$y(t) = b\,\mathrm{e}^{at},$$

za pomoci metody nejmenších čtverců na $\ln(y_{t_i})$?

Příklad 6: Hrubý odhad parametrů logistické křivky

$$y(t) = \frac{k}{1 + b\,\mathrm{e}^{-at}}, \tag{1}$$

pomocí metody nejmenších čtverců:

- parametry a, k - rovnici
  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay\left(1 - \frac{y}{k}\right)$$
  aproximujte pro diskrétní čas rovnicí používající místo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ aproximaci diferencemi $\frac{\Delta y_{t_i}}{\Delta t_i}$ a z ní odvoďte rovnici pro regresi $\frac{\Delta y_{t_i}}{y_{t_i}\Delta t_i}$ na y_{t_i}. Použijte metodu nejmenších čtverců pro spočítání odhadů $\hat{a}, \hat{k}$.
- $\hat{b}$ dopočítejte z rovnice pro $\ln b$ odvozené z (1) s dosazenými $\hat{a}, \hat{k}$ průměrováním přes všechna pozorovaná data.

Domácí úloha Deadline: 27.03.2023 (paper version)

Klasický příklad pro prokládání dat logistickou křivkou je případ odhadu růstu počtu obyvatel. napr. USA v začátcích 20. století. V souboru ObyvatelstvoUSA.csv jsou data za roky 1790 až 1940. H. Hotelling prokládal data za léta 1790 až 1910 logistickou křivkou a došel k odhadu

$$f(x) = \frac{195868}{1 + 67.5352\,\mathrm{e}^{-0.031239t}}.$$

Proložte data za roky 1790 až 1910 logistickou křivkou pomocí metody z Příkladu 6. Takto obdržené odhady parametrů použijte jako výchozí pro metodu z přednášky a proveďte jeden a dva iterační kroky.

Pro všechny odhady logistické křivky (Hotellingův a tři Vaše) spočítejte předpovědi pro roky 1920, 1930 a 1940. Vyrobte graf.

Který odhad dopadl nejlépe?