
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Bodové odhady neznámých parametrů pomocí metody maximální věrohodnosti

Cvičení 27.10.2026 & 29.10.2026 | Zimní semestr 2026/2027

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je reálný náhodný výběr (*i.i.d.*) z rozdělení s hustotou $f_\theta(x)$ (vzhledem k *Lebesgueově míře*, případně vzhledem k *čítací míře*), která závisí na neznámém parametru $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ (případně na vícerozměrném parametru $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ pro nějaké $p \in \mathbb{N}$). Připomeňme, že odhad neznámého parametru $\theta \in \Theta$ (resp. vektorového parametru $\theta \in \Theta$) na základě náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$ je měřitelné zobrazení z *výběrového prostoru* $\mathbb{R}^n$ do *parametrického prostoru* $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ (resp. $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$).

Samotný odhad $\hat{\theta} \equiv T(X_1, \dots, X_n) = T(\mathbf{X})$, kde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$, lze zkonstruovat mnoha způsoby (MM, GMM atd.) a jedním z nich je postup založený na principu maximalizace věrohodnostní funkce.

Věrohodnostní funkce je jakožto funkce neznámého parametru $\theta \in \Theta$ při daném náhodném výběru definována předpisem

$$L(\theta, \mathbf{X}) \equiv L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i), \quad \text{pro } \theta \in \Theta.$$

Věrohodnostní funkce $L(\cdot, \mathbf{X}) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ je vlastně *sdužená hustota* náhodného vektoru $(X_1, \dots, X_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ (jelikož náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé), která je vyhodnocena (resp. vyčíslena) v konkrétní realizaci náhodného výběru. Jelikož je parametr $\theta \in \Theta$ neznámý, díváme se na výraz $L(\theta, \mathbf{X})$ jako na funkci neznámého parametru. Tato funkce je ovšem také náhodná, protože závisí na datech – tj. na náhodném výběru $X_1, \dots, X_n$.

Jelikož mnoho běžných pravděpodobnostních rozdělení patří do *exponenciální rodiny rozdělení*, je z teoretického i výpočetního hlediska často vhodnější uvažovat tzv. *logaritmickou věrohodnostní funkci*, která je definována předpisem

$$l(\theta, \mathbf{X}) \equiv l(\theta, X_1, \dots, X_n) = \log L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \log(f_\theta(X_i)).$$

Odhad neznámého parametru $\theta \in \Theta$ pomocí *metody maximální věrohodnosti* je pak definován jako hodnota $\theta \in \Theta$, pro kterou funkce $l(\theta, \mathbf{X})$ nabývá svého (globálního) maxima, tedy platí, že

$$\hat{\theta}_n \in \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{Argmax}} \quad l(\theta, \mathbf{X}).$$

Hledání maxima již probíhá standardním způsobem: pokud je funkce $l(\theta, \mathbf{X})$ diferencovatelná vzhledem k parametru $\theta \in \Theta$, pak definujeme tzv. *skórovou funkci*

$$U(\theta, \mathbf{X}) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{f'_\theta(X_i)}{f_\theta(X_i)},$$

kde $f'_\theta(X_i)$ značí derivaci hustoty f_θ podle parametru $\theta \in \Theta$, vyčíslenou v realizované hodnotě $X_i \in \mathbb{R}$.

Řešením rovnice $U(\theta, \mathbf{X}) = 0$ nalezneme extrém logaritmické věrohodnostní funkce $l(\theta, \mathbf{X})$, který může být lokálním minimem, lokálním maximem nebo sedlovým bodem. Pokud je nalezený stacionární bod lokálním maximem (tedy např. platí, že $U'(\theta, \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \theta} U(\theta, \mathbf{X}) < 0$ pro všechny $\theta \in \Theta$, tedy funkce $l(\cdot, \mathbf{X})$ je konkávní), pak je daný bod *maximálně věrohodným odhadem* neznámého parametru $\theta \in \Theta$.

Pokud je parametr $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ vícerozměrný (tj. $p > 1$), pak $L(\cdot, \mathbf{X}) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ a $l(\cdot, \mathbf{X}) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$. Kandidáty na maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n \in \Theta$ můžeme za předpokladu diferencovatelnosti a vnitřního řešení nalézt řešením soustavy p rovnic

$$U(\theta, \mathbf{X}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p,$$

kde $U(\theta, \mathbf{X}) = (\frac{\partial}{\partial \theta_1} l(\theta, \mathbf{X}), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_p} l(\theta, \mathbf{X}))^\top$ a $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top \in \mathbb{R}^p$. Následně je nutné ještě ověřit, zda nalezené řešení skutečně odpovídá globálnímu maximu.

A Příklady

A1. Necht' $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Paretova rozdělení s hustotou

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x), \quad \text{pro } \theta > 2.$$

Pomocí momentové metody a metody maximální věrohodnosti najděte odhad neznámého parametru $\theta > 2$. [Použijte vztahy $\mathbb{E} X_i = \frac{\theta}{\theta-1}$, $\text{var } X_i = \frac{\theta}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$]

A2. Určete asymptotické rozdělení momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$ a maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ z předchozího příkladu a porovnejte jejich asymptotické rozptyly.

A3. Metodou maximální věrohodnosti na základě náhodného výběru $X_1, \dots, X_n \sim f_\theta(x)$ najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ , pokud hustota $f_\theta \in \mathcal{F}$ je definovaná předpisem

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{(2\theta-1)/(1-\theta)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta \in (0, 1).$$

Najděte asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

A4. Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$.

A5. Uvažujte náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde oba parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou neznámé. Pomocí metody maximální věrohodnosti najděte odhad vektorového parametru $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\top \in \boldsymbol{\Theta} \equiv \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Najděte asymptotické rozdělení tohoto odhadu.

A6* Necht' $X_1, \dots, X_n \sim U(\min(0, \theta), \max(0, \theta))$ pro $\theta \in \Theta \equiv \mathbb{R}/\{0\}$ (tj. rovnoměrné rozdělení na daném intervalu). Pomocí metody maximální věrohodnosti sestrojte odhad $\hat{\theta}$ pro neznámý parametr $\theta \in \Theta$.

B Doplňující příklady (opakování, nahrazování, procvičování)

Příklady v sérii B jsou určeny pro samostatné procvičování nad rámec výuky cvičení.

V následujících příkladech obecně předpokládáme, že náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ tvoří náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f_\theta(x) \in \mathcal{F} = \{f_\theta(x), \theta \in \Theta\}$.

- B1.** Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ v modelu

$$f_\theta(x) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1-x)1_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

- B2.** Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f_\theta(x) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1-x)1_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

- B3.** Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ v modelu

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

- B4.** Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

- B5.** Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ v modelu

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\right\}, \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

- B6.** Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ v modelu

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0 \quad (\text{Rayleighovo rozdělení}).$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

[Použijte vztah $E X_i^2 = 2\theta_X^2$.]

- B7.** Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ v modelu

$$f_\theta(x) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\theta(x-1)^2}{2x}\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

- B8.** Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ v modelu

$$f_\theta(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{\theta^2 x}\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

- B9.** Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ v modelu

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2} \exp\left\{-\frac{\theta}{x}\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.