Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17, MFF UK

7. Cvičení

---

1. Řešte diferenciální rovnice - speciální pravé strany

   a) $y'' + y = 4\sin x$
   b) $y'' - y = e^x \cos x$
   c) $y'' + y' + y = e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x$
   d) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$
   e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$
   f) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
   g) $y'''' - 2y''' + y'' = e^x + 1$
   h) $y'''' + y = (x+1)^4$

Řešte diferenciální rovnice - speciální pravé strany

a) $y'' + y = 4\sin x$
Char. rovnice: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, FS: $\cos x, \sin x$
Part. řešení: $y_p(x) = Ax\cos x + Bx\sin x \implies A = -2, B = 0$
$y(x) = c\cos x + d\sin x - 2x\cos x$

b) $y'' - y = e^x \cos x$
Char. rovnice: $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, FS: e^x, e^{-x}
Part. řešení: $y_p(x) = Ae^x\cos x + Be^x \sin x \implies A = -\frac{1}{5}, B = \frac{2}{5}$
$y(x) = ce^x + de^{-x} + \frac{2}{5}e^x \sin x - \frac{1}{5}e^x\cos x$

c) $y'' + y' + y = e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x$
Char. rovnice: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$, FS: $e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2), e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$
Part. řešení: $y_p(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x \implies A = 1, B = -1$
$y(x) = ce^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + de^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2) - e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$

d) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$
Char. rovnice: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, FS: e^x, e^{4x}
Part. řešení: $y_p(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) \implies A = -2, B = 2, C = -3$
$y(x) = ce^x + de^{4x} + e^{2x}(-2x^2 + 2x - 3)$

e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$
Char. rovnice: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, FS: e^x, xe^x, x^2e^x
Part. řešení: $y_{p_1}(x) = Ax^3e^x \implies A = 1/6$
Part. řešení: $y_{p_2}(x) = Ax + B \implies A = 1, B = -13$
$y(x) = ce^x + dxe^x + d'x^2e^x + x^3e^x/6 + x - 13$

f) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
Char. rovnice: $2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1/2$, FS: $e^{x/2}, e^{-x}, e^{2x}$
Part. řešenís RHS$=e^{2x}$: $y_p(x) = Axe^{2x} \implies A = 1/9$
Part. řešenís RHS$=e^{-2x}$: $y_p(x) = Be^{-2x} \implies B = -1/20$
Part. řešenís RHS$=2$: $y_p(x) = C \implies C = 1$
$y(x) = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + xe^{2x}/9 - e^{-2x}/20 + 1$

g) $y'''' - 2y''' + y'' = e^x + 1$
Char. rovnice: $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 1$, FS: $1, x, e^x, xe^x$
Part. řešenís RHS$=e^x$: $y_p(x) = Ax^2e^x \implies A = 1/2$
Part. řešenís RHS$=1$: $y_p(x) = Bx^2 \implies B = 1/2$
$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + x^2e^x/2 + x^2/2.$

h) $y'''' + y = (x+1)^4$
Char. rovnice: $\lambda^4 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$, FS: $e^{\pm x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2}), e^{\pm x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2})$
Part. řešení: $y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \implies A = 1, B = 4, C = 6, D = 4, E = -23$
$y(x) = span\{FS\} + x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 23$

2. Řešte diferenciální rovnice - Variace konstant

a) $y'' + y = \tan x$
b) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x-1}$
c) $y'' + y = \cos^{-3} x$
d) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$
e) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$
f) $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$

a) $y'' + y = \tan x$
Hom: FS: $\{\cos x, \sin x\}$, $y_H = c_1\cos x + c_2 \sin x$
$y_P = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$

$$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$$
$$c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x)\cos x = \tan x$$

$$c_1'(x) = -\sin^2 x/\cos x$$
$$c_2'(x) = -c_1'(x)\cos x/\sin x = \sin x$$

$$c_1(x) = \sin(x) + \log(\cos(x/2) - \sin(x/2)) - \log(\sin(x/2) + \cos(x/2))$$
$$c_2(x) = -\cos x.$$

b) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x-1}$
Hom: FS: $\{e^x, e^{-x}\}$, $y_H = c_1e^x + c_2e^{-x}$
$y_P = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0$$
$$c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = \frac{2e^x}{e^x-1}$$

$$c_1'(x) = \frac{1}{e^x-1}$$
$$c_2'(x) = -c_1'(x)e^{2x} = -\frac{e^{2x}}{e^x-1}$$

$$c_1(x) = \ln(1-e^x) - x$$
$$c_2(x) = -e^x - \ln(1-e^x).$$

c) $y'' + y = \cos^{-3} x$
Hom: FS: $\{\cos x, \sin x\}$, $y_H = c_1\cos x + c_2\sin x$
$y_P = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$

$$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$$
$$c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$\begin{aligned}c_1'(x) &= -\sin x/\cos^3 x\\ c_2'(x) &= -c_1'(x)\cos x/\sin x = 1/\cos^2 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1(x) &= -1/(2\cos^2(x))\\ c_2(x) &= \tan(x).\end{aligned}$$

$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos x} = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{2\sin^2(x)-1}{2\cos x} = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{\cos(2x)}{2\cos x}$

d) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$
Hom: FS: $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$, $y_H = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$
$y_P = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)xe^{-x}$

$$\begin{aligned}c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)xe^{-x} &= 0\\ c_1'(x)(-e^{-x}) + c_2'(x)e^{-x}(1-x) &= e^{-x}\ln x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1'(x) &= -xc_2'(x) = -x\ln x\\ c_2'(x) &= \ln x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1(x) &= -\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)\\ c_2(x) &= x\ln x - x.\end{aligned}$$

$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{3}{4}e^{-x}x^2 + \frac{1}{2}e^{-x}x^2\ln x.$

e) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$
Hom: FS: $\{e^x, e^{2x}\}$, $y_H = c_1e^x + c_2e^{2x}$
$y_P = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}$

$$\begin{aligned}c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} &= 0\\ c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} &= \frac{e^{3x}}{1+e^x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1'(x) &= -e^xc_2'(x) = \frac{-e^{2x}}{e^x+1}\\ c_2'(x) &= \frac{e^x}{e^x+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1(x) &= -e^x + \ln(e^x+1)\\ c_2(x) &= \ln(e^x+1).\end{aligned}$$

f) $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1-x^2}$
Hom: FS: $\{e^{x/2}, xe^{x/2}\}$, $y_H = c_1e^{x/2} + c_2xe^{x/2}$
$y_P = c_1(x)e^{x/2} + c_2(x)xe^{x/2}$

$$\begin{aligned}c_1'(x)e^{x/2} + c_2'(x)xe^{x/2} &= 0\\ c_1'(x)e^{x/2}/2 + c_2'(x)e^{x/2}(1+x/2) &= e^{x/2}\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1'(x) &= -xc_2' = -x\sqrt{1-x^2}\\ c_2'(x) &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1(x) &= \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\\ c_2(x) &= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)).\end{aligned}$$

3. Nechť $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Dokažte, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \text{pro} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$

Mit $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ erhält man

$$f_x(x,y,z) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3} \quad \text{und}$$

$$f_{xx}(x,y,z) = -\frac{r^3 - x\cdot 3\,r^2\cdot\frac{x}{r}}{r^6} = 3x^2\cdot\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

und analog

$$f_{yy}(x,y,z) = 3y^2\cdot\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^3}\ ,\ f_{zz}(x,y,z) = 3z^2\cdot\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

also

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2) - \frac{3}{r^3} = 0.$$

4. Spočtěte všechny parciální derivace prvního řádu

$$a)\ f(x,y,z) := z\cdot\arctan(x/y) \qquad b)\ f(x,y,z) := x^{(y^z)}$$

Zu a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xz}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \arctan(x/y).$$

Zu b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = zy^{z-1}x^{y^z}\ln x.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z}y^z\ln x\cdot\ln y.$$

5. Spočtěte smíšené parciální derivace druhého řádu

$$a)\ f(x,y) := \arccos\sqrt{(y/x)} \qquad b)\ f(x,y) := x^{(y^2)}$$

$$a)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{y}(x-y)^{3/2}} \qquad b)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2yx^{y^2-1} + 2y^3x^{y^2-1}\ln x.$$

6. *Základní pojmy vektorové analýzy.* Budiž $f = (f_1, f_2, f_3)$ a $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1,2,3$. Nechť mají funkce f_1, f_2 a f_3 spojité parciální derivace prvního řádu v každém směru. Definujeme rotaci vektorového pole f

$$\operatorname{rot} f := \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big),$$

divergenci vektorového pole f

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\,.$$

Dokažte následující identity:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv (0,0,0) \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

a

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) \equiv 0 \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \right) = (0,0,0).$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

7. Dokažte následující odhady pro $n \in \mathbb{N}$:

$$(1) \qquad \left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{n!}{e} < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}.$$

Wir setzen als bekannt voraus, dass die Folge

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

monoton-wachsend ist und gegen e konvergiert und die Folge

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

monoton-fallend ist und gegen e konvergiert.

Wir schreiben

$$c_n = \frac{n^n}{e^n n!}, \qquad d_n = nc_n = n\frac{n^n}{e^n n!}.$$

Aus den Abschätzungen

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{1}{e} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{e^n n!}{n^n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1$$

folgt, dass (c_n) eine fallende und (d_n) eine wachsende Folge sind. Aus den Ungleichungen

$$c_n < c_1 = \frac{1}{e}, \qquad d_n > d_1 = \frac{1}{e}$$

folgt (1).

wir schreiben (1) um:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{e} \cdot \frac{n}{e} < \sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{e}\sqrt[n]{n} \cdot \frac{n}{e}$$

$$\sqrt[n]{e} \cdot \frac{1}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \sqrt[n]{e}\sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{e}$$

Aus $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e}\sqrt[n]{n}\c{d}ot\frac{1}{e}$ folgt auch $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

8. Spočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n+(2n+\sin 4n)^2}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2^n+n^2)^2}{(5+\frac{1}{n})^n}$, f)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$.

Nápověda k f)

Z Bernoulliho nerovnosti plyne pro $x \geq -\frac{2}{n}$, že

$$(1+x)^n = \left[(1+x)^{n/2}\right]^2 \geq \left[1+\frac{n}{2}x\right]^2 = 1+nx+\frac{n^2x^2}{4}.$$

Zu a)

$$\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \frac{\frac{2n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}-\frac{3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}-\frac{1}{n^3}} = \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}}.$$

Aus $\frac{2}{n}\to 0$, $\frac{1}{n^2}\to 0$, $\frac{3}{n^3}\to 0$ folgt $\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}\to 0$. Ebenso folgt $1-\frac{1}{n^3}\to 1$. Insgesamt konvergiert $a_n \to \frac{0}{1} = 0$.

Zu b)

Folgt analog:

$$\frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7} = \frac{2+\frac{6}{n^2}}{1-\frac{7}{n^2}+\frac{7}{n^3}} \to \frac{2}{1} = 2.$$

Zu c)

$$\frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1} = \frac{2-\frac{3}{n^4}-\frac{2}{n^5}}{1-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^5}} \to \frac{2}{1} = 2.$$

Zu d)

$$\frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n+(2n+\sin 4n)^2} = \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{\sin 2n}{n}}{\frac{\cos 3n}{n}+4+\frac{4\sin 4n}{n}+\frac{\sin^2 4n}{n^2}} \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Zu e)

Alle a_n sind positive und lassen sich abschätzen durch

$$0 \leq a_n = \frac{2^{2n}+2n^2 2^n+n^4}{(5+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{4^n+n^2 2^{n+1}+n^4}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n + 2n^2\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{n^4}{5^n} \to 0+0+0 = 0.$$

Also geht auch a_n gegen 0.

Zu f)

Wir schreiben erstmal a_n um:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot n.$$

Nach der Ungleichung aus dem “Hinweis” folgt $\left(x = -\dfrac{1}{n+1}\right)$, dass

$$a_n \geq 1+n\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{n^2}{4}\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right)^2\cdot n = 1-\frac{n}{n+1}+\frac{n^3}{4(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}+\frac{n^3}{4(n+1)^2} \to \infty.$$

Also ist auch $a_n \to \infty$.

Überlegen Sie sich, dass die klassische Bernoulli-Ungleichung das Ergebniss nicht liefert, und das die Verallgemeinerung aus dem “Hinweis” also nötig war.

9. Spočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\ \right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2} + \dfrac{1}{n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\ \right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

f)* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right).$

zu (a): Hier ist zunächst festzustellen, dass der Ausdruck $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ für $x=-1$ alterniert, was bedeutet, dass für $x=-1$ der Grenzwert nicht existiert. Da $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x^n}+x^n}$ gilt , ergibt sich insgesamt folgende Fallunterscheidung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } |x|<1 \\ \neg\exists & \text{falls } x=-1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x=1 \\ 0 & \text{falls } |x|>1 \end{cases}$$

zu (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

zu (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2} + \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2} + \dfrac{n}{n^2}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\ \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\ \right) = \frac{1}{2}$$

zu (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\ \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{2}{2} = 1$$

Zu e)

Wir benutzen die Formel $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ für $a = \sqrt[3]{n+1}$ und $b = \sqrt[3]{n}$.

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}} = \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}} \to 0.$$

Also geht a_n gegen Null.

Aus der Rechnung folgt auch, dass $n^{\frac{2}{3}}a_n \to \frac{1}{3}$. Wir wissen also nich nur, dass a_n gegen Null geht, sondern auch "wie schnell", nämlich als $\frac{1}{3}n^{-\frac{2}{3}}$.

Zu f)

Wir folgen der Aufgabe e) mit dem Unterschied, dass wir die Formel

$$a^6 - b^6 = (a-b)\underbrace{\left(a^5+a^4b+\cdots+ab^4+b^5\right)}_{\star}$$

anwenden und das für $a = \sqrt{n^2+2}, b = \sqrt[3]{n^3+1}$:

$$a_n = n(a-b) = n\frac{(a-b)}{1} \cdot \frac{\star}{\star} = n \cdot \frac{a^6-b^6}{\star} = n \cdot \frac{(n^2+2)^3-(n^3+1)^2}{\star}$$
$$= n \cdot \frac{n^6+6n^4+12n^2+8-(n^6+2n^3+1)}{\star} = \frac{6n^5+12n^3+8n-2n^4-n}{\star}.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^5}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2)^{\frac{5}{2}}}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{[n^2(1+\frac{2}{n^2})]^{\frac{5}{2}}}{n^5} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{5}{2}} = 1$$

und ähnlich für die andere Summanden in $\star$. Also

$$a_n = \frac{6n^5+12n^3+8n-2n^4-n}{\star} = \frac{6+\frac{12}{n^2}+\frac{8}{n^4}-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^4}}{\frac{\star}{n^5}} \to \frac{6}{6} = 1.$$

10. Určete limity následujících posloupností pro $n \longrightarrow \infty$.

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!-n!}$ b) $n^2\left[\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^5-\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^3\right]$ c) $\dfrac{(-1)^n\, n}{2n^2+5}$ d) $\dfrac{n!}{n^n}$

e) $\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$ f) $\sqrt{(n+a)(n+b)}-n, \quad a,b>0$

zu a) $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!-n!} = \dfrac{(n+1)n!}{((n+2)(n+1)-1)n!} = \dfrac{n+1}{n^2+3n+3} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

zu b) $n^2\left[\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^5-\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^3\right] = n^2\left[\dfrac{15}{n}+\dfrac{90}{n^2}+\dfrac{270}{n^3}+\dfrac{405}{n^4}+\dfrac{243}{n^5}+1-\dfrac{15}{n}-\dfrac{75}{n^2}-\dfrac{125}{n^3}-1\right]$

$$= 15n+90+\frac{270}{n}+\frac{405}{n^2}+\frac{243}{n^3}+1-15n-75-\frac{125}{n}-1 = 15+\frac{145}{n}-\frac{405}{n^2}-\frac{243}{n^3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 15$$

zu c) $\dfrac{(-1)^n\, n}{2n^2+5} = \dfrac{(-1)^n}{2n+\frac{5}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

zu d) $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1\cdot\overbrace{2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-1)\cdot n}^{(n-1)-Faktoren}}{n^n} \le \dfrac{n^{n-1}}{n^n} = \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

zu e) Es gilt: $7 \overset{\infty\leftarrow n}{\longleftarrow} \sqrt[n]{7^n} \le \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 7^n} = 7\sqrt[n]{3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 7 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} =$ 7

zu f) $\sqrt{(n+a)(n+b)}-n = \dfrac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n} = \dfrac{n^2+n(a+b)+ab-n^2}{\sqrt{n^2+n(a+b)+ab)}+n}$

$$= \frac{a+b+\frac{ab}{n}}{\sqrt{1+\frac{(a+b)}{n}+\frac{ab}{n^2}}+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a+b}{2}$$

11. Ukažte, že posloupnost reálných čísel $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná pomocí $\xi_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\xi_n+\dfrac{a}{\xi_n}\right), \quad a \ge 0,$ $\xi_1 > 0$ konverguje k $\sqrt{a}$.

Zunächst kann man festhalten:

$$\xi_n \ge \sqrt{a} \text{ für } n \ge 2,$$

denn nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischem Mittel gilt:

$$\xi_n = \frac{1}{2}\left(\xi_{n-1} + \frac{a}{\xi_{n-1}}\right) \geq \sqrt{\xi_{n-1} \cdot \frac{a}{\xi_{n-1}}} = \sqrt{a}.$$

Weiterhin ist die Folge $(\xi_n)_{n=2}^{\infty}$ monoton fallend:

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{\xi_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a}\,)^2}\right) = 1.$$

Somit existiert der Grenzwert:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

Und mit

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{a}{\lambda}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{a}{2} \qquad \text{folgt} \qquad \lambda = \sqrt{a}\,. \qquad [(-\sqrt{a}\,) \text{ entfällt, da } \xi_n \geq 0.]$$

12. Spočtěte následující limity:

a) $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}$ b) $\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$ c) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ d) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$.

zu a:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{(-3)}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{(-3)}{n}\right)^n\right] = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-3)}{n}\right)^n}_{=e^{-3}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-3)}{n}\right)^n =$$

e^{-6}

zu b:

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} = \left[\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}\right]^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \left[\left(1 + \frac{(-2)}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{e \cdot (e^{-2})^{-1}}_{=e^3}$$

zu c:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $n > k$ gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n \geq \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^k.$$

Die Folge rechts konvergiert gegen e^k. Also ist $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \geq e^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge ist also divergent.

zu d:

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n}.$$

Der Ausdruck in $[\ldots]$ konvergiert gegen e und $\frac{1}{n} \to 0$. Man würde also natürlich vermuten, dass $b_n \to e^0 = 1$ konvergiert. So einen Satz (d.h. $a_n \to a, b_n \to b \implies a_n^{b_n} \to a^b$) haben wir aber nicht bewiesen! Wir müssen also einen Umweg nehmen. Z.B. folgt aus der Betrachtung in 4a)

$$1 \leq b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n \to e^{1/k}, \quad n > k.$$

Also gilt $1 \leq \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq e^{1/k}$ für alle $k \in\ N$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

13. Spoćtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ **d)** $\lim\limits_{x\uparrow 1} \ln x \, \ln(1-x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{(x-3)^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin 3x)}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^x-2^x}{x^2}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

zu a :

Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20} = \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-2x-8)'}{(x^2-9x+20)'} = \lim_{x\to 4} \frac{2x-2}{2x-9} = -6$$

zu b :

Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

zu c :

Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{3\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}\right)$$

Nebenrechnung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\ln\ \sin x - \ln x}{x^2} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x} =$$
$$\frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{x^2\cos x + 2x\sin x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{-x\cos x - \sin x}{4x\cos x + (2-x^2)\sin x} =$$
$$\frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - 2\cos x}{(6-x^2)\cos x - 6x\sin x}$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{6}\right) = -\frac{1}{2} \implies \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

zu d :

Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$\lim\limits_{x\uparrow 1} \ln x \, \ln(1-x) = \lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{\frac{-1}{1-x}}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{(\ln x)^2}{1-x}\cdot x$. Da $x\to 1$, gengt es $\lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{(\ln x)^2}{1-x}$ zu betrachten.

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{(\ln x)^2}{1-x} = \lim_{x\uparrow 1} \frac{(2\ln x \cdot \frac{1}{x})}{-1} = 0 \implies \lim_{x\uparrow 1} \ln x \, \ln(1-x) = 0$$

zu e :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{(x-3)^2} = -\infty \text{ weil } \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right) = -1.$$

zu f :

Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin 3x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin 5x}\cdot 5\cos 5x}{\frac{1}{\sin 3x}\cdot 3\cos 3x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{5}{3}\cdot\frac{\frac{\cos 5x}{\sin 5x}}{\frac{\cos 3x}{\sin 3x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{5}{3}\cdot\frac{\cos 5x}{\sin 5x}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$
$$= \frac{5}{3}\lim_{x\downarrow 0} \frac{3\cos 3x\cdot\cos 5x - 5\sin 3x\cdot\sin 5x}{5\cos 3x\cdot\cos 5x - 3\sin 3x\cdot\sin 5x} = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5} = 1$$

zu g :

Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^x - 2^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2^x \frac{(1+\frac{x}{2})^x - 1}{x^2} = \underbrace{\lim_{x\to 0} 2^x}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(1+\frac{x}{2})^x - 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\frac{x}{2})^x \cdot \left[\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{1+\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2}\right]}{2x}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}(1+\frac{x}{2})^x}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{1+\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{2x} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(2+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{2x} + \frac{1}{4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

zu h :

Nach der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to 1} \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 1} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right)\right) = \frac{1}{e}$$

14. Spočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{(\pi/2 - \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\arctan x)^{1/x}$,

c) $\lim\limits_{x\to \pi/2-} (\cos x)^{x-\pi/2}$.

zu a : $\displaystyle \lim_{x\to 1-} \frac{(\pi/2 - \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2}} = 1$

zu b : $\displaystyle \lim_{x\to 0} (1+\arctan x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+\arctan x)\right)$

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+\arctan x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\arctan x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{1} = 1 \implies \lim_{x\to 0} (1+$ $\arctan x)^{1/x} = e$

zu c : $\displaystyle \lim_{x\to \pi/2-} (\cos x)^{x-\pi/2} = \exp\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ln\cos x\right)$

$\displaystyle \lim_{x\to \pi/2-} \left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ln\cos x\right) = \lim_{x\to \pi/2-} \frac{\ln\cos x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} = \lim_{x\to \pi/2-} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{-\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} = \lim_{x\to \pi/2-} \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos x} \cdot$ $\underbrace{\lim_{x\to \pi/2-} \sin x}_{=1} =$

$$\lim_{x\to \pi/2-} \frac{2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin x} = 0 \implies \lim_{x\to \pi/2-} (\cos x)^{x-\pi/2} = 1$$