Matematická analýza pro fyziky I

LS 2016/17, MFF UK

6. Cvičení

1. Řešte následující diferenciální rovnice;

$a)\quad y' = e^{2x-y}$ $\qquad b)\quad y' = \sin(x-y)$ substituce: $z(x) = x - y(x)$

$c)\quad y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$ $\qquad d)\quad y' - y\cdot\cos x = 3\cos x$

$e)\quad x^3 + y - 2xy' = 0$ $\qquad f)\quad y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ substituce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

zu a) Multiplikation mit e^y und Integration liefert

$$\int e^y\,dy = \int e^{2x}\,dx \quad\Longrightarrow\quad e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad\Longrightarrow\quad y = \ln\Big(\frac{1}{2}e^{2x} + C\Big)\,.$$

zu b) Mit $z = x - y$ gilt $z' = 1 - y'$, also erhalten wir

$$1 - z' = \sin z \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{dz}{1-\sin z} = \int dx\,. \tag{1}$$

Die linke Seite ist

$$\int\frac{dz}{1-\sin z} = \int\frac{1+\sin z}{1-\sin^2 z}\,dz = \int\Big(\frac{1}{\cos^2 z} + \frac{\sin z}{\cos^2 z}\Big)\,dz = \tan z + \frac{1}{\cos z} + c\,.$$

Setzen wir dies in (1) ein, so bekommen wir die implizite Lösung

$$\tan z + \frac{1}{\cos z} = x + C\,, \quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Als Sonderlösung bekommen wir $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Mit den Formeln $\sin z = \dfrac{2\tan\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}$ und $\cos z = \dfrac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}$ folgt

$$x + C = \tan z + \frac{1}{\cos z} = \frac{\sin z + 1}{\cos z} = \frac{\frac{2\tan\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}} + 1}{\frac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{1+\tan^2\frac{z}{2}}} = \frac{2\tan\frac{z}{2} + 1 + \tan^2\frac{z}{2}}{1-\tan^2\frac{z}{2}} = \frac{(1+\tan\frac{z}{2})^2}{(1+\tan\frac{z}{2})(1-\tan\frac{z}{2})} = \frac{1+\tan\frac{z}{2}}{1-\tan\frac{z}{2}}$$

$$\Longrightarrow\quad \tan\frac{z}{2} = \frac{x+C-1}{x+C+1}\,.$$

Damit kann man nun y ausrechnen:

$$y = x - z = x - 2\cdot\arctan\frac{x+C-1}{x+C+1}\,.$$

zu c) Nach den Additionstheoremen gilt

$$y' = \sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{(x-y)-(x+y)}{4}\cos\frac{(x-y)+(x+y)}{4} = -2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Division durch $\sin\frac{y}{2}$ und Integration liefert

$$\int \frac{dy}{\sin\frac{y}{2}} = -2\int \cos\frac{x}{2}\,dx = -4\sin\frac{x}{2} + c\,. \tag{2}$$

Die linke Seite ist

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\sin\frac{y}{2}} &= \int \frac{\sin^2\frac{y}{2} + \cos^2\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{4}\cdot\cos\frac{y}{4}}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{y}{4}}{\cos\frac{y}{4}}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{y}{4}}{\sin\frac{y}{4}}\,dy \\ &= -2\ln\left|\cos\frac{y}{4}\right| + 2\ln\left|\sin\frac{y}{4}\right| + c = \ln\left(\tan^2\frac{y}{4}\right) + c\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Einsetzen in Gleichung (2) ergibt

$$\ln\left(\tan^2\frac{y}{4}\right) = -4\sin\frac{x}{2} + C\,, \quad C\in\mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad y = 4\cdot\left[\arctan\left(e^{\tilde{C}-2\sin\frac{x}{2}}\right) + k\pi\right] \quad \tilde{C}\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$$

Als Sonderlösung ergibt sich $y = 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

zu d) Zunächst lösen wir die homogene Gleichung:

$$y_h' - y_h\cos x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy_h}{y_h} = \int \cos x\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y_h| = \sin x + c \quad \Longrightarrow \quad y_h = Ce^{\sin x}$$

Das Prinzip der Variation der Konstanten besagt nun, dass die Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$y' - y\cos x = 3\cos x \tag{4}$$

durch den Ansatz $y = C(x)e^{\sin x}$ bestimmt werden kann. Setzen wir dies ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} C'(x)e^{\sin x} + C(x)\cos x e^{\sin x} - C(x)e^{\sin x}\cos x &= 3\cos x \\ \Longrightarrow \quad C'(x) = 3\cos x\, e^{-\sin x} \quad &\overset{\int}{\Longrightarrow} \quad C(x) = -3e^{-\sin x} + D\,, \quad D\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$y = \left(-3e^{-\sin x} + D\right)e^{\sin x} = -3 + De^{\sin x}\,, \quad D\in\mathbb{R}$$

zu e) Zuerst berechnen wir die homogenen Lösungen:

$$y_h - 2xy_h' = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\int \frac{dy_h}{y_h} = \int \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad 2\ln|y_h| = \ln|x| + c \quad \Longrightarrow \quad y_h = C\sqrt{|x|}$$

Variation der Konstanten $y = C(x)\sqrt{|x|}$ liefert

$$\begin{aligned} 0 = x^3 + C(x)\sqrt{|x|} - 2x\left(C'(x)\sqrt{|x|} + \frac{C(x)}{2\sqrt{|x|}}\right) &= x^3 - 2C'(x)x\sqrt{|x|} \\ C'(x) = \frac{1}{2}|x|^{3/2}\cdot\operatorname{sgn} x \quad &\overset{\int}{\Longrightarrow} \quad C(x) = \frac{1}{5}|x|^{5/2} + D\,, \quad D\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Also gilt

$$y = \frac{1}{5}|x|^3 + D\sqrt{|x|}$$

zu f) Mit der Substitution $z = \frac{y}{x}$, $y' = (zx)' = z'x + z$ erhalten wir

$$z'x + z = z + \sin z \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{dx}{x}$$

Mit Gleichung (3) aus Aufgabe 5c) folgt daraus

$$\ln\left|\tan\frac{z}{2}\right| = \ln|x| + c \quad\Longrightarrow\quad \tan\frac{z}{2} = Cx\,, \quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Also ist

$$y = xz = 2x\big[\arctan(Cx) + k\pi\big]\,, \quad C\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}\,.$$

Als Sonderlösung hat man $z = k\pi$, also $y = k\pi x$ mit $k\in\mathbb{Z}$.

2. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

a) $y'' - 2y' + y = e^x$
b) $y'' - y = f(x)$ s $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$
c) $y'' + y = f(x)$ s $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$

zu a) Zuerst lösen wir die homogene Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ mit dem Ansatz der Vorlesung $y = e^{\lambda x}$. Dabei ensteht folgendes Polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, welches die doppelte Nullstelle $\lambda_0 = 1$ hat. Laut Vorlesung ergeben sich somit folgende Basislösungen:

$y_1 = e^x$ und $y_2 = xe^x$. Also ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_H = c_1\cdot e^x + c_2\cdot xe^x$. Nun benötigen wir nur noch eine Lösung der inho mogenen Gleichung. Diese finden wir durch Variation der Konstanten. Wir setzten dazu

$$c_1(x)\cdot e^x + c_2(x)\cdot xe^x \tag{5}$$

in die inhomogene Differentialgleichung ein. Die Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$ erfüllen nun folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

Es folgt also:

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int -xdx = -\frac{x^2}{2} \text{ und } c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int 1dx = x.$$

Setzt man diese gefundenen Lösungen in (5) ein, so ergibt sich folgende spezielle Lösung der Differentialgleichung:

$$y_S = -\frac{x^2}{2}e^x + x^2e^x = \frac{x^2}{2}e^x.$$

Die allgemeine Lösung ist nun

$$y_A = y_H + y_S = \frac{x^2}{2}e^x + c_1\cdot e^x + c_2\cdot xe^x.$$

zu b) Analog zu a) löst man zuerst die homogene Gleichung mit dem Ansatz $e^{\lambda x}$. Dabei ergeben sich die Nullstellen $\lambda_0 = \pm 1$. Also sind die Basislösungen $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$. Die homogene Lösung lautet: $y_H = c_1\cdot e^x + c_2\cdot e^{-x}$. Nach der Variation der Konstanten (wie in a) ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Es folgt also:

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int \frac{f(x)}{2}e^{-x}dx \text{ und } c_2(x) = \int c_2'(x)dx = -\int \frac{f(x)}{2}e^{x}dx.$$

- $f(x) = x$ ergibt $c_1 = \frac{-x-1}{2}e^{-x}$ und $c_2 = \frac{-x+1}{2}e^{x}$. Damit ist $y_S = \frac{-x-1}{2}e^{-x}e^{x} + c_2 = \frac{-x+1}{2}e^{x}e^{-x} = -x$ eine spezielle Lösung. Es ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y_A = y_S + y_H = -x + c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}.$$

- $f(x) = \sin x$ ergibt $c_1 = \frac{e^{-x}}{4}(-\sin x - \cos x)$ und $c_2 = \frac{e^x}{4}(\sin x - \cos x)$. Damit ist $y_S = -\frac{\sin x}{2}$ eine spezielle Lösung. Es ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y_A = y_S + y_H = -\frac{\sin x}{2} + c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}.$$

zu c) Analog zu a) löst man zuerst die homogene Gleichung mit dem Ansatz $e^{\lambda x}$. Dabei ergeben sich die Nullstellen $\lambda_0 = \pm i$. Da wir aber an reellen Funktionen interessiert sind, ergeben sich nach Vorlesung die Basislösungen $y_1 = \sin x$ und $y_2 = \cos x$ und damit die homogene Lösung $y_H = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Mit Variation der Konstanten ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Es folgt also:

$$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int f(x) \cos x dx \text{ und } c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int -f(x) \sin x dx.$$

- $f(x) = x$ ergibt $c_1 = \cos x + x \sin x$ und $c_2 = -\sin x + x \cos x$. Damit ist $y_S = x$ eine spezielle Lösung. Es ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y_A = y_S + y_H = -x + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

- $f(x) = \sin x$ ergibt durch partielle Integration:

$$c_1 = \int \sin x \cos x dx = \sin x \sin x - \int \cos x \sin x dx = \frac{\sin^2 x}{2}$$

und

$$c_2 = \int -\sin^2 x dx = \sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = \frac{\sin x \cos x}{2} - \frac{x}{2}.$$

Damit ist $y_S = \frac{\sin x - x \cos x}{2}$ eine spezielle Lösung. Es ergibt sich die allgemeine Lösung als:

$$y_A = y_S + y_H = \frac{\sin x - x \cos x}{2} + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

a) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2\,, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2\,, & x_2(0) = 5 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 4x_2\,, & x_1(0) = 3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\,, & x_2(0) = 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 + 2x_2\,, & x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 + x_2\,, & x_2(0) = 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + x_2 - 36t\,, & x_1(0) = -2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 - 2e^t\,, & x_2(0) = 3 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -5x_1 + 2x_2 + e^t\,, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 6x_2 + e^{2t}\,, & x_2(0) = 0 \end{aligned}$

a) $\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda + 3)(\lambda - 2) \end{aligned}$

$\lambda_1 = -3$ führt zu $4c_1 + c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.
$\lambda_2 = 2$ führt zu $-c_1 + c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Als allgemeine Lösung ergibt sich $x(t) = A \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) e^{-3t} + B \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{2t}$.
Das AWP führt zu $A = B = 1$

b) $det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

Hier soll der Lösungsvorschlag mit dem modifizierten Ansatz vorgestellt werden:
$x(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} e^t$. Die Differentialgleichung führt zu:

$$a_1 e^t + b_1 e^t + b_1 t e^t = (3a_1 - 4a_2)e^t + (3b_1 - 4b_2) t e^t$$
$$a_2 e^t + b_2 e^t + b_2 t e^t = (a_1 - a_2)e^t + (b_1 - b_2) t \cdot e^t .$$

Die zweite Gleichung ist entbehrlich. Der Koeffizientenvergleich ergibt: bei

$$\begin{array}{lll} t \cdot e^t & -2b_1 + 4b_2 & = 0 \\ e^t & -2a_1 + 4a_2 & = -b_2 \end{array}$$

wählen wir $b_2 = B$ und $a_2 = A$ erhalten wir darüberhinaus $b_1 = 2B$ und $a_1 = 2A + B$
und somit $x(t) = \begin{pmatrix} 2A + B + 2Bt \\ A + \ \ Bt \end{pmatrix} e^t = A \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^t + B \left(\begin{smallmatrix} 1+2t \\ t \end{smallmatrix}\right) e^t$.

Das AWP führt zu $A = B = 1$.

c) $det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - 2 - 3i)(\lambda - 2 + 3i)$
$\lambda_1 = 2 + 3i$ führt zu $(1 - 3i)c_1 + 2c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i-1 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = 2 - 3i$ ergibt einen konjungierten Eigenvektor. Eine reelle Lösungsdarstellung ist
$x(t) = A \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ 3\cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix} e^{2t}$.
Das AWP führt zu $A = B = 1$.

d) $det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ aus $\lambda_1 = 3$ erhalten wir $c_1 + c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus $\lambda_2 = 2$ erhalten wir $2c_1 + c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und somit ergibt sich als allgemeine Lösung des homogenen Problems
$x_H(t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t}$.
Als Ansatz für eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems wählen wir obige Darstellung mit variablen A und B.
Eingesetzt in eine Differentialgleichung ergibt sich das folgende Gleichungssystem für die Ableitungen von $A(t)$ und $B(t)$:

$$\begin{array}{rcl} A'(t)e^{3t} + B'(t)e^{2t} & = & -36t \\ -A'(t)e^{3t} - 2B'(t)e^{2t} & = & -2e^t \\ \text{woraus } A'(t) & = & -72t\, e^{-3t} - 2e^{-2t} \\ \text{und } B'(t) & = & 2e^{-t} + 36t\, e^{-2t} \end{array}$$

folgt.
Die Integration und die Zusammenfassung der Lösungsbestandteile ergibt:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)e^{3t} + B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)e^{2t} + (24t\, e^{-3t} + 8e^{-3t} + e^{-2t})\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)e^{3t} \\ & & +(-2e^{-t} - 18t\, e^{-2t} - 9e^{-2t})\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)e^{2t} \\ & = & A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)e^{3t} + B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)e^{2t} + \begin{pmatrix} 6t - 1 - e^t \\ 12t + 10 + 3e^t \end{pmatrix} \end{array}$$

Das AWP führt zu $A = -10\,, B = 10\,.$

e) $det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 28 = (\lambda+4)(\lambda+7)\,,$

aus $\lambda_1 = -4$ erhalten wir $-c_1 + 2c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_1 = \binom{2}{1}$

aus $\lambda_2 = -7$ erhalten wir $2c_1 + 2c_2 = 0$ und wir wählen $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Somit ergibt sich als allgemeine Lösung des homogenen Problems:

$$x_H = A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7t}$$

Die Variation der Konstante führt zum Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcrcl} A'(t)2e^{-4t} & + & B'e^{-7t} & = & e^t \\ A'(t)e^{-4t} & + & B'e^{-7t} & = & e^{2t} \end{array}$$

mit den Lösungen $A' = \dfrac{1}{3}e^{5t} + \dfrac{1}{3}e^{6t}$ sowie

$$B' = -\frac{2}{3}e^{9t} + \frac{1}{3}\,e^{8t}\,.$$

Nach Integration und Zusammenfassung der Bestandteile ergibt sich:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\tbinom{2}{1}e^{-4t} \quad +B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-7t}\left(\tfrac{1}{15}e^{5t} + \tfrac{1}{18}\,e^{6t}\right)\tbinom{2}{1}\;e^{-4t} \\ &\qquad\qquad\qquad + \left(-\tfrac{2}{27}\,e^{9t} + \tfrac{1}{24}\,e^{8t}\right)\tbinom{1}{-1}e^{-7t} \\ &= A\tbinom{2}{1}e^{-4t} \quad +B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-7t}\begin{pmatrix} \frac{7}{40}\,e^t + \frac{1}{27}\,e^{2t} \\ \frac{1}{40}\,e^t + \frac{7}{54}\,e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das AWP wird dem Leser überlassen.

4. Řešte diferenciální rovnice

   a) $y''' - y' = e^{2x}$

   b) $y'' - y = (1+x)e^{2x}$

   c) $y''' - 7y' + 6y = 0$

   d) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

   e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x \quad (x > 0)\,.$

   a) charakteristisches Polynom: $\lambda^3 - \lambda$
   Nullstellen: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$
   allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_H(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$
   Ansatz für $y_s(x)$: $y_s(x) = be^{2x}$
   spez. Lösung des inhomogenen Problems: $y_s(x) = \frac{1}{6}e^{2x}$

   b) charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 1 = 0$
   Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$
   allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_H(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$
   Ansatz für $y_s(x)$: $y_s(x) = (ax+b)e^{2x}$
   spez. Lösung des inhomogenen Problems: $y_s(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{1}{9})e^{2x}$

c) charakteristisches Polynom: $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$
Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 2$
allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{2x}$

d) charakteristisches Polynom: $\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0$
Nullstellen: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2/3} = 2i,\ \lambda_{4/5} = -2i$
allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + c_4 x \cos 2x + c_5 x \sin 2x$

e) charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 4\lambda + 4$
Nullstellen: $\lambda_{1/2} = -2$
allgemeine Lösung des homogenen Problems: $y_H(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$
Gleichungssystem nach Variation der Kostanten:

$$\begin{aligned} c_1' + x c_2' &= 0 \\ -2c_1' + (1-2x)c_2' &= \ln x \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems und Intergration:

$$\begin{aligned} c_2' = \ln x \quad &\Rightarrow \quad c_2 = x(\ln x - 1) \\ c_1' = -x \ln x \quad &\Rightarrow \quad c_1 = -\tfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) \end{aligned} \Big)$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= (c_1 + c_2 x)e^{-2x} - \tfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1)e^{-2x} + x^2(\ln x - 1)e^{-2x} \\ &= (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + x^2 e^{-2x}(\tfrac{1}{2}\ln x + \tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

5. Řešte diferenciální rovnice

a) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$

b) $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4\cos(\ln(1+x))$

a) Der Ansatz $y(x) = x^\lambda$ zeigt, dass

$$\lambda(\lambda - 1) + 5\lambda + y = (\lambda + 2)^2 = 0$$

woraus $y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 (\ln x) x^{-2}$ folgt. Man beachte die Modifikation des Vorfaktors für die 2. Lösung

b) Aufgrund der Struktur der Vorfaktoren erfährt der Ansatz eine leichte Änderung:
$y_H(x) = (1+x)^\lambda$, woraus $\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = \lambda^2 + 1 = 0$ folgt mit $\lambda_{1/2} = \pm i$.
Da erst später geklärt wird, was x^i ist, untersuchen wir hier die transformierte Gleichung, wobei

$$\begin{aligned} y' &= \tfrac{dg}{dt} \cdot \tfrac{1}{(x+1)} = \dot{g}\tfrac{1}{x+1} \text{ und} \\ y'' &= \ddot{g}\tfrac{1}{(1+x)^2} - \dot{g}\tfrac{1}{(1+x)^2} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Die transformierte Gleichung lautet nun $\ddot{g} + g = 4\cos t$ wobei $t = \ln(t+1)$
mit $g_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.
Der Ansatz $g_0 = t(b_1 \cos t + b_2 \sin t) \quad (m = 1)$ liefert $b_1 = 0$ und $b_2 = 2$ und somit die Lösung $g(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2t \sin t$ woraus

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos[\ln(1+x)] + c_2 \sin[\ln(1+x)] \\ &\quad +2\ln(1+x)\sin[\ln(1+x)] \qquad \text{folgt.} \end{aligned}$$

6. Řešte diferenciální rovnice - separace proměnných

a) $y' = xy^2$

b) $y' = -y \ln x \ln y$

c) $y' = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)$

d) $y' = (y+3)\tan x$

e) $y' = -\frac{xy}{1+x^2}$

f) $y' = y^2 \cos x$

g) $y' = \frac{-e^{y^2}}{x^2 y}$

h) $y' = \frac{1-y^2}{x}$

a) $y' = xy^2$

$y(x) = 0$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y^2} &= x dx\\ -\frac{1}{y} &= x^2/2 + c\\ y(x) &= -\frac{1}{x^2/2+c} = -\frac{2}{x^2+c'}.\end{aligned}$$

b) $y' = -y \ln x \ln y$

$y(x) = 1$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y \ln y} &= -\ln x dx\\ \ln(\ln y(x)) &= -x\ln x + x + c\\ y(x) &= \exp(\exp(-x\ln x + x + c))\end{aligned}$$

c) $y' = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)$

$y(x) = -3/2$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned}\frac{dy}{2y+3} &= \frac{dx}{4x+5},\\ \frac{\ln|2y+3|}{2} &= \frac{\ln|4x+5|}{4} + c\\ \ln|2y+3| &= \frac{\ln|4x+5|}{2} + c' = \ln\sqrt{|4x+5|} + c'\\ 2y+3 &= K\sqrt{|4x+5|}, \quad K \in \mathbb{R}\\ y &= \frac{K}{2}\sqrt{|4x+5|} - \frac{3}{2}, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

d) $y' = (y+3)\tan x$

$y(x) = -3$ je jistě řešením. Jinak

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y+3} &= \tan x dx\\ \ln|y+3| &= -\ln|\cos x| + c = \ln\frac{1}{|\cos x|} + c\\ y(x) + 3 &= \frac{K}{|\cos x|}, \quad K \in \mathbb{R}\\ y(x) &= \frac{K}{|\cos x|} - 3, \quad K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e) $y' = -\frac{xy}{1+x^2}$
$y(x) = 0$ je jistě řešením. Jinak

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= -\frac{x}{1+x^2}dx \\
\ln|y| &= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c \\
y(x) &= \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

f) $y' = y^2 \cos x$
$y(x) = 0$ je jistě řešením. Jinak

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y^2} &= \cos x dx \\
-\frac{1}{y} &= \sin x + c \\
y(x) &= \frac{1}{c - \sin x}
\end{aligned}
$$

g) $y' = \frac{-e^{y^2}}{x^2 y}$

$$
\begin{aligned}
ye^{-y^2}dy &= -\frac{dx}{x^2} \\
-\frac{1}{2}e^{-y^2} &= \frac{1}{x} + c \\
e^{-y^2} &= -\frac{2}{x} + c' \\
-y^2 &= \ln\left(c' - \frac{2}{x}\right) = \ln\frac{c'x-2}{x} \\
y^2 &= \ln\frac{x}{c'x-2} \\
y &= \sqrt{\ln\frac{x}{c'x-2}}.
\end{aligned}
$$

h) $y' = \frac{1-y^2}{x}$
$y(x) = \pm 1$ je jistě řešením. Jinak

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{1-y^2} &= \frac{dx}{x} \\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| &= \ln|x| + c, \\
\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| &= \ln(x^2) + c', \\
\left|\frac{y+1}{y-1}\right| &= Kx^2, \quad K > 0 \\
\frac{y+1}{y-1} &= Kx^2, \quad K \neq 0 \\
y(1-Kx^2) &= -Kx^2 - 1 \\
y(x) &= -\frac{1+Kx^2}{1-Kx^2}
\end{aligned}
$$

7. Řešte diferenciální rovnice - separace proměnných

a) $x(x+1)y(y+1)-y'=0; \quad y(0)=-1$
b) $y'=\frac{2xy^2}{1-x^2}, \quad y(0)=1$
c) $y'=\frac{y}{x}, \quad x>0$
d) $y'=\frac{y^2}{x^2}, \quad x>0$
e) $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}y'=0$
f) $2\sqrt{y}=y'$
g) $(1+x^2)(1+y^2)y'+2xy(1-y^2)=0, \quad (0,-2)$
h) $y'\tan(x)-y=1, \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{\pi}{6},0\right)$
i) $y'=\frac{x}{y}$
j) $y'=\frac{y}{x}$
k) $y'=\tan x\tan y$ s $x,y\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ a $k\in\mathbb{N}$
l) $y'+2xy=0$

Lösen Sie die Differentialgleichungen - Trennung der Variablen

a) $x(x+1)y(y+1)-y'=0; \quad y(0)=-1$

$$y_1=0, \quad y_2=-1$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}y}{y(y+1)} &= \int x(x+1)\mathrm{d}x\\
\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c'\\
\ln\frac{|y|}{|y+1|} &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c'\\
\frac{y}{y+1} &= c\exp\{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\}\\
\frac{1}{y+1} &= 1-c\exp\{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\}\\
y &= \frac{1}{1-c\exp\{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\}}-1
\end{aligned}$$

b) $y'=\frac{2xy^2}{1-x^2}, \quad y(0)=1$

$$x\neq\pm1, \quad y\neq0$$

$y=0$ ist Lösung der Differentialgleichung, aber AB nicht in 1.
FĂĽr $-1<x<1$: (AB: $x=0\wedge y=1 \curvearrowright c=-1$)

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= 2\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x\\
\frac{-1}{y} &= 1+\ln(1-x^2)\\
y &= \frac{1}{1+\ln(1-x^2)}
\end{aligned}$$

c) $y' = \frac{y}{x}, \quad x > 0$
$y = 0$ ist Lösung. $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}\\ \ln|y| &= \ln x + c\\ y &= cx\end{aligned}$$

d) $y' = \frac{y^2}{x^2}, \quad x > 0$
$y = 0$ ist Lösung. $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} &= \frac{\mathrm{d}y}{y^2}\\ -\frac{1}{x} &= -\frac{1}{y} + c\\ \frac{1}{x} + c &= \frac{1}{y}\\ y &= \frac{1}{\frac{1}{x} + c} = \frac{x}{1 + cx}\end{aligned}$$

e) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$
Lösung $y = \pm 1$:

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Lösung $y \neq 1$:

$$-\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} + c$$

f) $2\sqrt{y} = y'$
Lösung ist $y = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} &= \mathrm{d}x\\ \sqrt{y} &= x + c\\ y &= (x+c)^2\end{aligned}$$

g) $(1+x^2)(1+y^2)y' + 2xy(1-y^2) = 0, \quad (0, -2)$
Lösungen $y = 0, \pm 1$:

$$\frac{1+y^2}{y(y^2-1)} = \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

sonst:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{(1+y^2)}{y^2}}{\frac{(y^2-1)}{y}}\mathrm{d}y &= \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ \frac{y^2-1}{y} &= c(x^2+1)\end{aligned}$$

speziell: $\frac{4-1}{-2} = c \; c = -\frac{3}{2}$

$$y - \frac{1}{y} = -\frac{3}{2}(x^2+1)$$

h) $y'\tan(x) - y = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$
Lösung $y = -1$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y} = \frac{\mathrm{d}x}{\tan x}$$

sonst:

$$\ln|1+y| = \ln|\sin x|$$
$$1 + y = c\sin x$$

speziell: $1 = c\sin\frac{\pi}{6} = \frac{c}{2}\ c = 2$

$$y = -1 + 2\sin x$$

i) $y' = \frac{x}{y}$

$$yy' = x$$
$$\int y\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x$$
$$\frac{y^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} + c$$
$$x^2 - y^2 = c$$

j) $y' = \frac{y}{x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\ln|y| = \ln|x| + c$$
$$y = cx$$

k) $y' = \tan x \tan y$ mit $x, y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ und $k \in \mathbb{N}$
Ausnahmelösung: $y_k = k\pi$.

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$
$$\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + c'$$
$$\sin y = \frac{c}{\cos x}$$
$$y = \arcsin\left(\frac{c}{\cos x}\right)$$

l) $y' + 2xy = 0$
Ausnahmelösung: $y_1 = 0$.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int 2x\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -x^2 + c'$$
$$y = ce^{-x^2}$$

8. Řešte diferenciální rovnice - variace konstant

a) $x^3 + y - 2xy' = 0$

b) $xy' - 2y = e^x(x-2)$
c) $y' - y\cos x = 3\cos x$
d) $xy' + 2y = x^2$
e) $y' = y\tan(x) + 1$ s počáteční podmínkou $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$
f) $y' - \frac{y}{x} = -\sqrt{x}$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$
g) $(1+x^2)y' + xy = 1$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.
h) $y' + \frac{1}{2x}y = \sqrt{x}\sin(x)$ s $y(\pi) = 2\sqrt{\pi}$
i) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
j) $y' = \frac{\sin x}{\cos x}y + \cos x$

Lösen Sie die Differentialgleichungen - Variation der Konstanten

a) $x^3 + y - 2xy' = 0$
Homogene Lösung:

$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$y = c\sqrt{|x|}$$

Spezielle Lösung mit Variation der Konstanten.

$$c'\sqrt{|x|} = \frac{x^2}{2}$$
$$c' = \begin{cases} \frac{x^{3/2}}{2} & x > 0 \\ \frac{(-x)^{3/2}}{2} & x < 0 \end{cases}$$
$$c = \begin{cases} \frac{x^{5/2}}{2} & x > 0 \\ \frac{(-x)^{5/2}}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Spezielle inhomogene Lösung:

$$y = \frac{x^3}{5}$$

Allgemeine inhomogene Lösung:

$$y = c\sqrt{|x|} + \frac{x^3}{5}$$

b) $xy' - 2y = e^x(x-2)$
Homogene Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\ln|y| = 2\ln|x|$$
$$y = cx^2$$

Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten mit $y(x) = c(x)x^2$.

$$c'x^3 + 2cx^2 - 2cx^2 = e^x(x-2)$$
$$c'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)e^x$$
$$c(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = cx^2 + e^x$$

c) $y' - y\cos x = 3\cos x$
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned} y' &= y\cos x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \cos(x)\mathrm{d}x \\ \ln|x| &= \sin(x) + c \\ y &= ce^{\sin x} \end{aligned}$$

Spezielle Lösung mit Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} c\left(e^{\sin x}\right)' + c'e^{\sin x} &= ce^{\sin x}\cos x + 3\cos x \\ c' &= 3\cos(x)e^{-\sin x} \\ c &= -3e^{-\sin x} \end{aligned}$$

Spezielle Lösung:

$$y = -3$$

Allgemeine Lösung:

$$y = ce^{\sin x} - 3$$

d) $xy' + 2y = x^2$
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned} y' &= -2\frac{y}{x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{2y} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln|y| &= -2\ln|x| + c \\ y &= \frac{c}{x^2} \end{aligned}$$

Spezielle Lösung durch Variation der Konstanten mit $y(x) = \frac{c(x)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{c'x - 2c}{x^2} + \frac{2c}{x^2} &= x^2 \\ \frac{c'}{x} &= x^2 \\ c &= \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{x^4}{4}$$

e) $y' = y\tan(x) + 1$ mit der Anfangsbedingung $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \tan(x)\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= -\ln|\cos x| \\ y &= \frac{c}{\cos x} \end{aligned}$$

Spezielle Lösung mit Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} \frac{c'(x)}{\cos x} &= 1 \\ c(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Spezielle Lösung:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Allgemeine Lösung:

$$y = \frac{c}{\cos x} + \tan x$$

Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$1 + \sqrt{2} = \frac{c}{\sqrt{2}} + 1 = c\sqrt{2} + 1, \quad c = 1$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

f) $y' - \frac{y}{x} = -\sqrt{x}$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 3$
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + c \\ y &= cx \end{aligned}$$

Spezielle Lösung mit Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)x \\ c' &= -\sqrt{x} \\ c(x) &= -2x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = cx - 2\sqrt{x}^3$$

Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$3 = c - 2, \quad c = 5$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = 5x - 2\sqrt{x}^3$$

g) $(1 + x^2)y' + xy = 1$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2 - 1} \\ \ln|y| &= \frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + c \\ y &= c\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Spezielle Lösung mit Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)\sqrt{1 - x^2} \\ c'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}^3} \\ c(x) &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c\sqrt{1 - x^2} + x$$

Lösung mit Anfangsbedingung:

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} + x$$

h) $y' + \frac{1}{2x}y = \sqrt{x}\sin(x)$ mit $y(\pi) = 2\sqrt{\pi}$
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{2x}\\ \ln|y| &= -\frac{1}{2}\ln|x| + c\\ y &= c\sqrt{x}\end{aligned}$$

Spezielle Lösung mit Variation der Konstanten.

$$\begin{aligned}y &= \frac{c(x)}{\sqrt{x}}\\ \frac{c'}{\sqrt{x}} &= \sqrt{x}\sin x\\ c(x) &= -x\cos x + \sin x\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x)\frac{c + \sin x - x\cos x}{\sqrt{x}}$$

Einsetzten der Anfangsbedingung:

$$2\sqrt{\pi} = y(\pi) = \frac{c+\pi}{\sqrt{\pi}}, \quad c = \pi$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x)\frac{\pi + \sin x - x\cos x}{\sqrt{x}}$$

i) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned}(1+x^2)y' &= 2xy\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{2x\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ \ln|y| &= \ln(1+x^2) + c\\ y &= c(1+x^2)\end{aligned}$$

Inhomogene Lösung durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}(1+x^2)c'(1+x^2) &= (1+x^2)^2\\ c &= x\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y = (x+c)(1+x^2)$$

j) $y' = \frac{\sin x}{\cos x}y + \cos x$
Homogene Lösung:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\sin x}{\cos x}y\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x\\ \ln|y| &= -\ln|\cos x| + c\\ y &= \frac{c}{\cos x}\end{aligned}$$

Inhomogene Lösung durch Variation der Konstanten:

$$Y = \frac{c(x)}{\cos x}$$
$$c'(x) = \cos^2 x$$
$$c(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$$

Allgemeine Lösung:

$$y = \frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\frac{x}{\cos x}$$