Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17

4. Cvičení

1. Nechť $f(x) = \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)\frac{1}{x-1}, \quad (x \neq 1).$

   a) Ukažte $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{32}$.

   b) Udejte $\delta > 0$ takové, že pro všechna x s $|x-1| < \delta$ platí: $|f(x) - \frac{1}{32}| < \frac{1}{100}$.

   zu a :

   $$f(x) = \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)\frac{1}{x-1} = \left(\frac{3x+5-2x-6}{(x+3)(3x+5)}\right)\frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x+3)(3x+5)}$$

   $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{32}$ gilt genau dann, wenn $\left|f(x) - \frac{1}{32}\right|$ eine Nullfolge ist:

   $$\left|f(x) - \frac{1}{32}\right| = \left|\frac{32-(x+3)(3x+5)}{(x+3)(3x+5)32}\right| = \left|\frac{-3x^2-14x+17}{(x+3)(3x+5)32}\right| = \frac{|x-1|\ |-3x-17|}{32\,|x+3|\ |3x+5|}$$

   Für $x \in \mathrm{U}_1(1)$, d.h für $\delta < 1$ $(\star)$ $\implies$ $\left|f(x) - \frac{1}{32}\right| \leq |x-1|\,\frac{20}{32\cdot 3\cdot 5} = |x-1|\,\frac{1}{24}$ $\implies$

   $\frac{|x-1|}{24} < \varepsilon \iff |x-1| < 24\,\varepsilon \implies \delta < 24\,\varepsilon$ und mit $(\star)$ folgt $\delta < \min\{1, 24\varepsilon\}$

   zu b : $\left|f(x) - \frac{1}{32}\right| < \frac{1}{100}$ ist nach a) für $\delta = \frac{24}{100}$ erfüllt.

2. a) Vyjádřete

   $$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

   pro $a \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}$ pomocí kvantifikátorů.

   b) Definujme

   $$\begin{aligned} U(a,\delta) &= (a-\delta, a+\delta) \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\ U(+\infty,\delta) &= (1/\delta, \infty) \quad \text{pro} \quad \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\ U(-\infty,\delta) &= (-\infty, -1/\delta) \quad \text{pro} \quad \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\ U^+(a,\delta) &= [a, a+\delta) \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\ U^-(a,\delta) &= (a-\delta, a] \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\ P^+(a,\delta) &= U^+(a,\delta) \setminus \{a\}, P^-(a,\delta) = U^-(a,\delta) \setminus \{a\}, P(a,\delta) = U(a,\delta) \setminus \{a\}. \end{aligned}$$

   Vyjádřete pomocí této notace výše uvedené limity.

3. Spočtěte následující limity:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, \quad (b \neq 0)$

   b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{x-4}\left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{11}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1000}\, e^{-\sqrt{x}}$

   d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

   e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^{10} + 10^{10}\right)^{-1} \sum\limits_{k=0}^{1000} (x+k)^{10}$

   f) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(2 + x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right)$

   g) $\lim\limits_{x\to 0-} \left(2 + x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right)$

zu a :

Aus der Vorlesung kann $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ als bekannt vorausgesetzt werden. Somit ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}\right]=\frac{a}{b}$$

zu b :

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{11}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}\left(\frac{(\sqrt{3x-1}-\sqrt{11})(\sqrt{3x-1}+\sqrt{11})}{(\sqrt{3x-1}+\sqrt{11})}\right)=$$
$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}\frac{3(x-4)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{11}}=\frac{3}{2\sqrt{11}}$$

zu c :

$$\lim_{x\to\infty}x^{1000}\,e^{-\sqrt{x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{2000}}{e^t}=0$$

zu d :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sum_{k=0}^{n-1}x^k=n$$

zu e :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{1000}(x+k)^{10}}{\left(x^{10}+10^{10}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{1000}(1+\frac{k}{x})^{10}}{\left(1+(\frac{10}{x})^{10}\right)}=1001$$

zu f und g :

Es gilt:

$$\left(2+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)=\left(2+\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+4}\right).$$

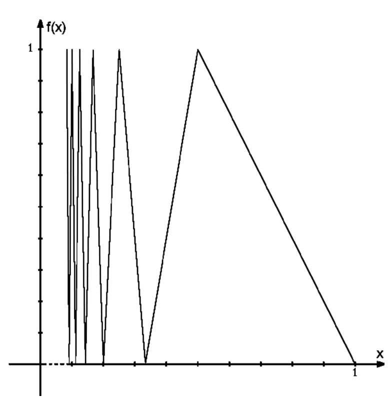
Somit ist

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)=4\quad\text{und}\quad\lim_{x\to 0^-}\left(2+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)=0.$$

4. a) Funkce $f:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ budiž definována jako : $f\left(\frac{1}{2n}\right):=1,\ f\left(\frac{1}{2n-1}\right):=0,\ n\in\mathbb{N}$, a na každém intervalu $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ nechť jsou funkční hodnoty na koncích intervalu spojeny úsečkou. Načrtněte průběh funkce a ukažte, že limita $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ neexistuje.

   b) Nechť $f(x)=\begin{cases}x & \text{pro } x\in\mathbb{Q},\\ 1 & \text{jinak.}\end{cases}$ Pro která $x_0\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$?

zu a :



$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ kann nicht existieren, denn in jeder $\varepsilon-$Umgebung von $x = 0$ kommt jeder Wert aus dem Intervall $[0,1]$ als Funktionswert von $f(x)$ beliebig oft vor.

zu b :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert nur für $x_0 = 1$, denn nur an dieser Stelle lassen sich $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ und $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ in einer $\varepsilon-$Umgebung unterbringen.

5. Budiž $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na $\mathbb{R}$. Funkce f_+ a f_- jsou definovány jako:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pokud} \quad f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{pokud} \quad f(x) < 0 \end{cases} \qquad \text{a} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{pokud} \quad f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{pokud} \quad f(x) > 0 \end{cases}.$$

Ukažte:

a) Platí $f = f_+ - f_-$ a $|f| = f_+ + f_-$.

b) f_+ a f_- jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Bemerkung: Wenn eine Funktion f im Punkt x_0 stetig ist, so ist die Funktion $|f|$ auch im Punkt x_0 stetig.

Denn wenn $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ gilt, so ist auch $|\,|f(x)| - |f(x_0)|\,| < \varepsilon$, nach der Dreiecksungleichung nach „unten“: $||x| - |y|| < |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

zu a : klar nach Definition von f_+ und f_-

zu b : Es gilt:[1] $\max\{f,g\} = \dfrac{f+g}{2} + \dfrac{|f-g|}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \max\{f,g\} \text{ stetig nach Satz 3 Abschnitt 2.3.2} \\ f_+ = \max\{f,0\} \text{ und } f_- = \max\{-f,0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow f_+ \text{ und } f_- \text{ stetig.}$$

6. a) Dokažte: $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

b) $16 \arctan \dfrac{1}{5} - 4 \arctan \dfrac{1}{239} = \pi$

zu a :

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

zu b :

Sei x so gewählt, dass $\tan x = \dfrac{1}{5}$ gilt:

$$\Longrightarrow \tan 2x = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \;\wedge\; \tan 4x = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Mit $y := 4x - \dfrac{\pi}{4}$ folgt: $\tan y = \dfrac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \dfrac{1}{239}$ [2]

$$\Longrightarrow \pi = 16x - 4y = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

7. Spočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x^2 - 2x} - \dfrac{x}{x^2 - 4} \right)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx) - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (1-x)}{x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

[1] Siehe 3.Serie Aufgabe 2.

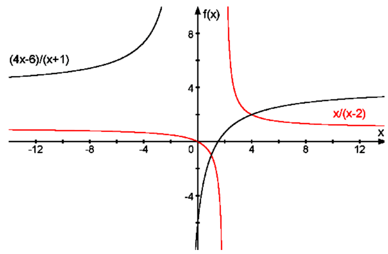
[2] $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

8. Vyšetřete následující funkce na spojitost:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} & x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x-6}{x+1} & x \in \mathbb{N} \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ c) $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$

d) $f(x) = x - [x]$, wobei $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leq x\}$.

zu a :



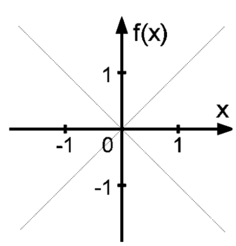
Der folgenden Satz der Vorlesung[3] ist der Schlssel zur Lösung dieser Aufgabe:

$f : \mathbb{C} \supset \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \mathrm{D}$. Dann gilt: f stetig in $z_0 \iff z_0$ ist isolierter Punkt oder $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} & x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x-6}{x+1} & x \in \mathbb{N} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x-6}{x+1} & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Zunächst ist festzuhalten, dass die Funktion für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ stetig ist, denn für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ gilt stets $f(x_0)$ ist definiert und $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Da $n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Funktion f insbesondere auf $(-\infty, 1)$ stetig. Auch für $x = 1$ ist f stetig, denn $f(1) = -1 = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x-2}$. Der nächste Punkt, der in Bezug auf Stetigkeit „problematisch“ werden kann, ist $x = 2$. Da $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2}$ nicht existiert, kann die Funktion an der Stelle auch nicht stetig sein. Für $x = 3$ gilt $f(3) = \frac{3}{2} \neq \lim_{x \to 1} \frac{x}{x-2} = 3$, also liegt keine Stetigkeit an dieser Stelle vor; jedoch für $x = 4$, wie man leicht nachrechnet. Für $x = 5$ gilt wieder: $f(5) = \frac{14}{6} \neq \lim_{x \to 5} \frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}$, also keine Stetigkeit. Für $n \geq 5$ ist stets $f(n) = 4 - \frac{10}{n+1} > 2$ während $\lim_{x \to n} f(x) = \frac{n}{n-2} < 2$ stets kleiner 2 ist. Somit ist f für $n > 5$ im Punkt $x = n$ niemals stetig.

zu b :



$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nur stetig in $x_0 = 0$.

zu c :

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|} = x + \frac{x}{x \cdot \operatorname{sign}(x)} = x + \frac{1}{\operatorname{sign}(x)} = \begin{cases} x+1 & \text{fr} \quad x > 0 \\ \infty & \text{fr} \quad x = 0 \\ x-1 & \text{fr} \quad x < 0 \end{cases} \implies \quad f \text{ ist auf } \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ stetig.}$$

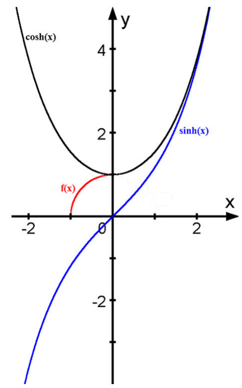
zu d :

[3] 2.3.2 Satz 2

Offensichtlich ist die Funktion f auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig.

9. Zjistěte, zda jsou následující funkce ryze monotóní a (pokud ano) najděte inverzní funkci.

   a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,0]$ b) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$ c) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$



zu a :
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist auf $D(f) = [-1,0]$ stetig und monoton wachsend.
$\Longrightarrow \ \exists f^{-1}: \ y = \sqrt{1-x^2} \iff y^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow x = -\sqrt{1-y^2}$ („$-$" wegen $D(f) = [-1,0]$)
$\Longrightarrow \ f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$ mit $D(f^{-1}) = R(f) = [0,1]$

zu b :
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ist stetig und monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
$\Longrightarrow \ \exists \sinh^{-1} = \operatorname{Arsinh}: \ y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \iff 2ye^x = (e^x)^2 - 1 \Longrightarrow (e^x)_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$ („$-$" entfällt, da $e^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$)
$\Longrightarrow \ x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \Longrightarrow \operatorname{Arsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

zu c :
Eine zunächst „formale" Berechnung der Umkehrfunktion des *Cosinus hyperbolicus*, also der Funktion *Areacosinus hyperbolicus* führt zu folgendem Ergebnis:
$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \iff 2ye^x = (e^x)^2 + 1$
$\Longrightarrow (e^x)_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2-1} \Longrightarrow x = \log\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right) \Longrightarrow \operatorname{Arcosh}(x) = \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$
Die Funktion ist offensichtlich doppeldeutig, denn für jedes $x \in [1,\infty)$ existieren zwei Funktionswerte. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, dass *Cosinus hyperbolicus* symmetrisch zur Y-Achse ist, für jeden Funktionswert also zwei Urbilder mit gleichen Betrag und unterschiedlichem Vorzeichen existieren. Anschaulich gesehen entspricht also der „untere" Ast des *Areacosinus hyperbolicus* dem „linken" Ast des *Cosinus hyperbolicus* und entsprechend für die anderen Äste.
Die Gülltigkeit der obigen „formalen" Rechnung ist dadurch gesichert, dass *Cosinus hyperbolicus* auf $[0,\infty)$ bzw. auf $(-\infty,0]$ stetig und streng monoton, d.h. injektiv ist. Durch die Umformung:

$$\operatorname{Arcosh}(x) = -\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \log\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \log\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}\right) = \log\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

10. Najděte přirozené definiční obory funkcí, vyšetřete funkce na diferencovatelnost a najděte jejich derivace:

    a) $e^{x^3 \cos x}$, b) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$, c) $\left|\pi^2 - x^2\right| \sin^2 x$, d) $\cos^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, e) x^{2x},

    f) $|\cos x|$, g) $2^{\sin\frac{1}{x}}$, h) $\sqrt{1-e^{-x^2}}$, i) $\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$

zu a : $D(f)=\mathbb{R} \ \wedge f'(x)=(e^{x^3\cos x})'=e^{x^3\cos x}\cdot(x^3\cos x)'=f(x)\cdot(3x^2\cos x-x^3\sin x)$

zu b : $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2\neq k\pi,\ k\in\mathbb{N}\}\wedge f'(x)=\left(\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)'=\dfrac{2\sin x\cos x\sin x^2-\sin^2 x\cos x^2\cdot 2x}{(\sin x^2)^2}$

zu c : $f(x)=\left|\pi^2-x^2\right|\sin^2 x=|\pi+x|\,|\pi-x|\sin^2 x=\left\{\begin{array}{cl}(x^2-\pi^2)\sin^2 x & ,\ |x|>\pi\\ 0 & ,\ |x|=\pi\\ (\pi^2-x^2)\sin^2 x & ,\ |x|<\pi\end{array}\right\}\Longrightarrow D(f)=\mathbb{R}$

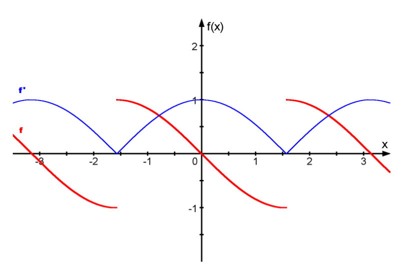
$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{|\pi+x|\,|\pi-x|}{x-\pi}\sin^2 x=0\ \wedge\ \lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{f(x)-f(-\pi)}{x+\pi}=\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{|\pi+x|\,|\pi-x|}{x+\pi}\sin^2 x=0$

$$\Longrightarrow f'(x)=\left\{\begin{array}{cl}2x\sin^2 x+2(x^2-\pi^2)\sin x\cos x & ,\ |x|>\pi\\ 0 & ,\ |x|=\pi\\ 2(\pi^2-x^2)\sin x\cos x-2x\sin^2 x & ,\ |x|<\pi\end{array}\right\}$$

zu d : $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x\neq-1\}\ \wedge\ f'(x)=\left[\cos^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right]'=2\cos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\sin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2}$

zu e : Die Funktion f kann „sinnvoll“ nur auf $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$ betrachtet werden:
Zwar könnte $(-2)^{-4}$ als $(-2)^{-4}=\dfrac{1}{(-2)^4}=\dfrac{1}{16}$ definiert werden, doch ist dies für irrationale Zahlen, wie π nicht möglich, denn es ist zum Beispiel nicht klar, welches Vorzeichen $(-\pi)^{-2\pi}=\dfrac{1}{(-\pi)^{2\pi}}$ haben soll.
Jedoch gilt, dass f auf $(0,\infty)$ nicht nur stetig, sondern sogar differenzierbar ist:
Allgemein gilt: $f>0 \Longrightarrow (\log f)'=\dfrac{f'}{f}$[4] $\Longleftrightarrow f\cdot(\log f)'=f'$. Da $f(x)=x^{2x}$ auf $(0,\infty)$ aber stets grösser Null ist, kann der Logarithmus von f auch gebildet werden. Somit ist $f'(x)=x^{2x}\cdot(\log x^{2x})'=x^{2x}\cdot(2\log x+2)$ und man betrachtet
$D(f)=(0,\infty)$ als den „naturgemässen“ Definitionsbereich von f.

zu f : $f(x)=|\cos x|\Longrightarrow D(f)=\mathbb{R}\wedge f'(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)\cdot(-\sin x)$ für $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$;
also nicht diff'bar in $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.



zu g : $f(x)=2^{\sin\frac{1}{x}}=e^{\log 2\cdot\sin\frac{1}{x}}\Longrightarrow D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{x=0\vee x=\dfrac{1}{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}\wedge f'(x)=f(x)\cdot\log 2\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

[4] Kettenregel

zu h : $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}} \implies D(f)=\mathbb{R} \wedge f'(x)=\dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, denn

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\operatorname{sign} x\cdot\sqrt{\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, also ist f an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar.

zu i : $f(x)=\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|=\operatorname{sign}(x-1)(x-1)(x-2)^2\operatorname{sign}(x-3)(x-3)^3 \implies D(f)=\mathbb{R}$

Sei $x\neq 1,3:$ $f'(x)=\operatorname{sign}(x-1)\cdot\operatorname{sign}(x-3)\cdot\left[(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right]'$

$=\operatorname{sign}(x-1)\cdot\operatorname{sign}(x-3)\cdot\big[(x-2)^2(x-3)^3+(x-1)2(x-2)(x-3)^3+(x-1)(x-2)^2 3(x-$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\operatorname{sign}(x-1)\cdot 8 \implies \text{der Grenzwert existiert nicht.}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0=f'(3)$$

Zusammenfassend kann man sagen, dass f auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ diff'bar ist.

11. Zjistěte, zda jsou funkce v bodě $x_0=1$ diferencovatelné!

a) $f(x)=\left\{\begin{array}{l}1-x^2\ ,\ x\le 1\\ x^2-1\ ,\ x>1\end{array}\right\}$ b) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{x} & ,\ 0<x<1\\ -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ , & x\ge 1\end{array}\right\}$ c) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{x+2}{x+1} & ,\ 0<x<1\\ -\dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{4}\ , & x\ge 1\end{array}\right\}$

zu a :

$f(x)=\left\{\begin{array}{l}1-x^2\ ,\ x\le 1\\ x^2-1\ ,\ x>1\end{array}\right\}$ ist stetig im Punkt $x_0=1$, da $f(1)=f(1+)=\lim\limits_{x\to 1+}x^2-1=0=\lim\limits_{x\to 1-}1-x^2=f(1-)$.

Weiter gilt: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1-(1+h)^2}{h}\ ,\ h\le 0\\ \dfrac{(1+h)^2-1}{h}\ ,\ h>0\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}-(2+h)\ ,\ h\le 0\\ 2+h\quad ,\ h>0\end{array}\right\}.$

Daher kann f im Punkt $x_0=1$ nicht differenzierbar sein.

zu b :

$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{x} & ,\ 0<x<1\\ -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ , & x\ge 1\end{array}\right\}$ ist stetig im Punkt $x_0=1$, da $f(1)=f(1+)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{x}=1=\lim\limits_{x\to 1-}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}=f(1-)$.

Weiter gilt: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\left\{\begin{array}{ll}\left(\dfrac{1}{h+1}-1\right)\dfrac{1}{h} & ,\ h<0\\ \left(-\dfrac{(1+h)^2}{2}+\dfrac{3}{2}-1\right)\dfrac{1}{h} & ,\ h\ge 0\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{-1}{h+1} & ,\ h<0\\ -1-\dfrac{h}{2} & ,\ h\ge 0\end{array}\right\}.$

Damit ist $f'_-(1)=f'_+(1)=-1$ und f im Punkt $x_0=1$ differenzierbar.

zu c :

Die Funktion $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{x+2}{x+1} & ,\ 0<x<1\\ -\dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{4}\ , & x\ge 1\end{array}\right\}$ ist im Punkt $x_0=1$ nicht stetig und kann somit auch nicht differenzierbar sein.

12. Najděte rovnici tečny
a) k parabole $y = 3x - x^2$ v bodě $(1, 2)$,
b) k elipse $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$ v bodě $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

<u>Bemerkung</u> Die Gleichung der Tangente im Punkt x_0 an die Funktion f ist: $\boxed{y_t = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$

<u>**zu a**</u> **:** $f'(1) = 1$ und $f(1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad y_t = 2 + 1(x-1) = x + 1$

<u>**zu b**</u> **:** $(x-1)^2 + 4y^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}} \quad \Longrightarrow f'(x) = -\frac{x-1}{4\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}}}$

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ und } f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad y_t = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}x$$

13. Najděte rozměry válcové konzervy, která má při daném objemu 1 dm^3 minimální plochu.

14. Určete derivace $\left(f^{-1}\right)'(y)$ a $\left(g^{-1}\right)'(y)$ pro funkce

a) $f(x) = \ln\sqrt{1 + x^4}$, $x \in (0, \infty)$, b) $g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

<u>**zu a**</u> **:**

$y = \log\sqrt{1 + x^4} \Longrightarrow e^y = \sqrt{1 + x^4} \Longrightarrow e^{2y} = 1 + x^4 \Longrightarrow x = \sqrt[4]{e^{2y} - 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{1 + x^4} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1 + x^4}{2x^3} \Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{e^{2y}}{2\left(\sqrt[4]{e^{2y} - 1}\right)^3}$$

<u>**zu b**</u> **:**

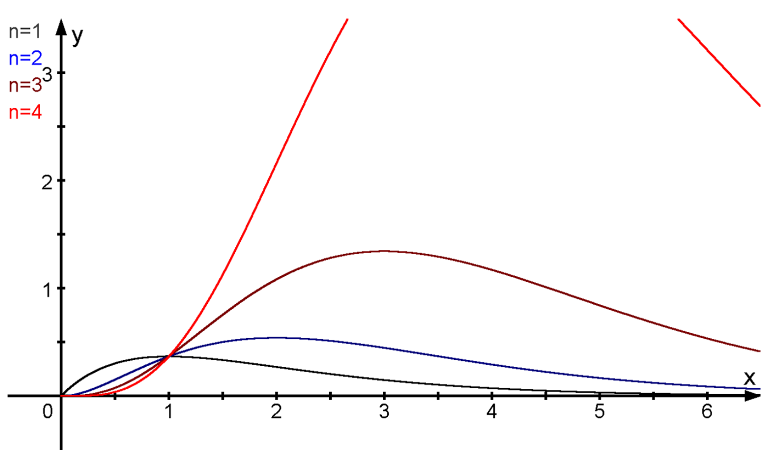
$y = \sinh(x) \Longrightarrow x = \operatorname{arsinh}(y)$

$$\frac{dy}{dx} = \cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2 x} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} \Longrightarrow \left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

15. Pro následující funkce nalezněte lokální a globální extrémy:

a) $f(x) = x^n e^{-x}$ na $[0, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$, b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ na $(0, \infty)$

<u>**zu a**</u> **:**

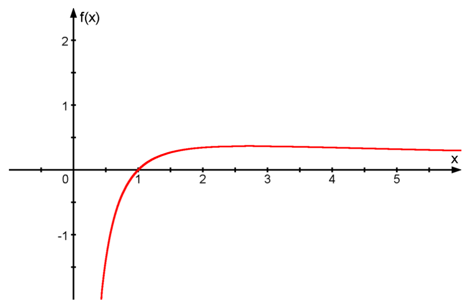


$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = e^{-x}x^{n-1}(n - x)$

Es gilt: $f'(x_0) = 0 :\Longleftrightarrow$

- $x_0 = 0$: An dieser Stelle liegt ein lokales und globales Minimum vor (siehe Skizze), denn $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in [0, \infty)$.
- $x_0 = n$: An dieser Stelle liegt ein lokales und globales Maximum vor (siehe Skizze), denn $f'(x) > 0$ für $x \in (n - \varepsilon, n)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (n, n + \epsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

<u>zu b</u> :



$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \implies x = e$

$f'(x) > 0$ für $x < e \implies$ lokales Maximum. $f'(x) < 0$ für $x > e \implies$ globales Maximum.

Wegen $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ existiert keine Minimum, weder ein lokales noch ein globales.

16. Pro následující funkce nalezněte lokální a globální extrémy:

$$a) \quad f(x) = |x^2 - 1| \text{ na [-2,2]} \quad b) \quad f(x) = \sin x \sin 2x \text{ na } \mathbb{R}$$

a) $f(x)$ ist differenzierbar auf $(-2, 2) \setminus \{-1, 1\}$ und dort echt grösser 0. Wegen $f(1) = f(-1) = 0$ sind folglich $x = 1$ bzw. $x = -1$ globale Minimumstellen.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & : \quad -1 < x < 1 \\ 2x & : \quad 1 < |x| < 2 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f''(x) = \begin{cases} -2 & : \quad -1 < x < 1 \\ 2 & : \quad 1 < |x| < 2 \end{cases}$$

$x = 0$ eine lokale Maximumstelle. Bleiben noch die Randpunkte 2 und -2 zu untersuchen. Es ist $f(2) = f(-2) = 3$. Also sind insgesamt:

$$\begin{array}{rl} (2;3), (-2;3) & \quad \text{globale Maxima} \\ (1;0), (-1;0) & \quad \text{globale Minima und} \\ (0;1) & \quad \text{lokales Maximum.} \end{array}$$

b)

$$f(x) = \sin x \sin(2x) = 2 \sin x \sin x \cos x = 2 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \sin(2x) + 2 \sin x \cos(2x) \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + 2 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 2 \sin x (\cos^2 x + 2 \cos^2 x - 1) \\ &= 2 \sin x (3 \cos^2 x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cos x (3 \cos^2 x - 1) - 6 \sin x \cos x 2 \sin x \\ &= 2 \cos x (3 \cos^2 x - 1 - 6 \sin^2 x) \\ &= 2 \cos x (9 \cos^2 x - 7) \end{aligned}$$

notwendige Bedingung für lokale Extrema: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \text{oder} \quad |\cos x| = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Wir setzen $x_1 := 0$ und $x_2 := \pi$. Dann erhalten wir $f''(x_1) = 4$ und $f''(x_2) = -4$. Also ist $(0;0)$ lokales Minimum und $(\pi;0)$ lokales Maximum. Sei weiter $x_3 \in (0, \pi/2)$ und $x_4 \in (\pi/2, \pi)$ so gewählt, dass

$$\cos x_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad \cos x_4 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$x_3, -x_3$ sowie x_4 und $-x_4$ sind weitere Extremstellenkandidaten. Wir haben

$$f''(x_3) = f''(-x_3) = 2\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{9}{3} - 7\right) < 0 \quad \text{und}$$

$$f''(x_4) = f''(-x_4) = -2\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{9}{3} - 7\right) > 0.$$

Ausserdem ist

$$f(x_3) = f(-x_3) = 2\sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3} \quad \text{und}$$

$$f(x_4) = f(-x_4) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

Aufgrund der 2π-Periodizität von f gibt es also die folgenden Extrema:

$$\begin{array}{rcl} \text{globale Maxima} & : & \left\{\left(x_3 + 2k\pi, \frac{4}{9}\sqrt{3}\right), \left(-x_3 + 2k\pi, \frac{4}{9}\sqrt{3}\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} \\ \text{globale Minima} & : & \left\{\left(x_4 + 2k\pi, -\frac{4}{9}\sqrt{3}\right), \left(-x_4 + 2k\pi, -\frac{4}{9}\sqrt{3}\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} \\ \text{lokale Minima} & : & \{(2k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\} \\ \text{lokale Maxima} & : & \{((2k+1)\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$