Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17, MFF UK

3. Cvičení

---

1. Ukažte, že pro kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Rightarrow x_1 + \ldots + x_n \geq n$$

Návod: Abyste dokázali výrok pro $x_1, \ldots, x_{n+1}$, předpokládejte, že $x_n < 1$ a $x_{n+1} > 1$ (proč to lze?) a použijte indukční předpoklad na $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$.

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot (x_n x_{n+1}) = 1$$
$$\rightarrow x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n$$
$$\text{noch zz:} \quad x_n x_{n+1} \leq n_n + x_{n+1} - 1$$
$$\underbrace{(x_{n+1} - 1)(1 - x_n)}_{=-1+x_n+x_{n+1}-x_n x_{n+1}>0} \quad > 0 \uparrow$$

2. Artitmetický průměr nezáporných čísel $x_1, \ldots, x_n$ je $a = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$, geometrický průměr je $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ a harmonický průměr $h = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots\frac{1}{x_n}}$.

Dokažte, že $a \geq g \geq h$

Návod: Použijte, že $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n = 1 \Rightarrow y_1 + \ldots + y_n \geq n$ pro kladná y_i.

$$\begin{array}{lll} & \frac{x_1}{\sqrt[n]{x1\cdot\ldots\cdot x_n}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{x1\cdot\ldots\cdot x_n}} = 1 & \\ \rightarrow & \frac{x_1+\ldots x_n}{\sqrt[n]{x1\cdot\ldots\cdot x_n}} \geq n & a \geq g \\ & \frac{\sqrt[n]{x1\cdot\ldots\cdot x_n}}{x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt[n]{x1\cdot\ldots\cdot x_n}}{x_n} = 1 & \\ \rightarrow & \sqrt[n]{x1 \cdot \ldots \cdot x_n}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n & g \geq h \end{array}$$

3. Dokažte pro (komplexní) čísla $a_1, \ldots, a_n$ a $b_1, \ldots, b_n$ Cauchy-Schwarzovu nerovnost:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq \sqrt{\sum |a_k|^2}\sqrt{\sum |b_k|^2}$$

Návod: Ověřte pro $A_k = \frac{|a_k|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}}$ a $B_k = \frac{|b_k|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}}$ nerovnost $\sum A_k B_k \leq 1$.

Použijte přitom skutečnost, že geometrický průměr lze shora odhadnou aritmetickým průměrem.

$$A_k = \frac{|a_k|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}} \qquad B_k = \frac{|b_k|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}}$$

$$\begin{aligned} \sum_1^n A_k B_k &= \sum \sqrt{A_k^2 B_k^2} \\ &\leq \sum \frac{A_k^2 + B_k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum A_k^2 + \frac{1}{2}B_k^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{\sqrt{\sum |a_i|^2}} \frac{|b_k|}{\sqrt{\sum |b_i|^2}} \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq \sqrt{\sum |a_i|^2}\sqrt{\sum |b_i|^2}$$

4. Dokažte pro čísla $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ Minkowského nerovnost

$$\sqrt{\sum |a_k + b_k|^2} \leq \sqrt{\sum |a_k|^2} + \sqrt{\sum |b_k|^2}$$

   Návod: Rozložte součet pod levou odmocninou na dva součty a použijte Cauchy-Schwarzovu nerovnost.

$$\begin{array}{rcl}
\sum |a_k + b_k|^2 & \leq & \sum |a_k + b_k||a_k| + \sum |a_k + b_k||b_k| \\
& \underset{CS}{\leq} & \sqrt{\sum |a_k + b_k|^2}\sqrt{\sum |a_k|^2} + \sqrt{\sum |a_k + b_k|^2}\sqrt{\sum |b_k|^2} \\
& = & \sqrt{\sum |a_k + b_k|^2}\left[\sqrt{\sum |a_k|^2} + \sqrt{\sum |b_k|^2}\right]
\end{array}$$

5. Buď $\theta \neq 2k\pi$.
   Dokažte identitu

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \dots \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin\frac{n\theta}{2}$$

   a

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

   Návod: Rozepište $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-1k\theta}$.

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-ik\theta} & = & (\cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta) + i(\sin\theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta) \\
= e^{i\theta}\sum\limits_{k=1}^{n-1} e^{ik\theta} & = & e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} \\
& = & e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{1-e^{in\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
& = & \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}-e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \\
& = & \left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)
\end{array}$$

   noch zz:

$$\begin{array}{ccc}
\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) & = & 2\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right) \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta - \frac{n}{2}\theta\right) & - & \cos\left(\frac{n+1}{2}\theta + \frac{n}{2}\theta\right)
\end{array}$$

6. Najděte všechna reálná čísla x s

$$1 - \sin 3x = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1 - \sin x$$

oder

$$
\begin{array}{rccc}
 & 1-\sin 3x & = & \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \\
\leftrightharpoons & \sin 3x & = & \sin x \\
 & \shortparallel & & \\
\leftrightharpoons & 3\sin x - 4\sin 3x & = & \sin x \\
\to & \sin x = 0 & \vee & 2\sin^2 x = 1 \\
 & \updownarrow & & \updownarrow \\
 & x = k\pi & & \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & & & \updownarrow \\
 & & & x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}
\end{array}
$$

7. Spočtěte následující komplexní čísla:

a) $z = (-\sqrt{5} + i\sqrt{5})^3(1+i)^2$

b) $z = \dfrac{(-1+4i)^2}{5-2i}$

c) $z = \left(\dfrac{4-i}{2+i}\right)^2$

d) $z = \dfrac{125}{(2+i)^3} + (1+i)^8 - 7i$

e) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^3\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3$

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen :

a) $z = (-\sqrt{5} + i\sqrt{5})^3(1+i)^2 = (\sqrt{5})^3(-1+i)^3(1+i)^2 = 5(\sqrt{5})\underbrace{[(-1+i)(1+i)]^2}_{=4}(-1+i) =$

$= 20(\sqrt{5})(-1+i) = -20\sqrt{5} + 20\sqrt{5}i$

b) $z = \dfrac{(-1+4i)^2}{5-2i} = \dfrac{(-1+4i)^2(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \dfrac{(-1+4i)^2(5+2i)}{29}$

$= \dfrac{(-15+8i)(5+2i)}{29} = \dfrac{(-59-70i)}{29} = -\dfrac{59}{29} - \dfrac{70}{29}i$

c) $z = \left(\dfrac{4-i}{2+i}\right)^2 = \left(\dfrac{(4-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^2 = \left(\dfrac{(4-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^2 = \left(\dfrac{7-6i}{5}\right)^2 = \dfrac{13-84i}{25} = \dfrac{13}{25} - \dfrac{84}{25}i$

d) $z = \dfrac{125}{(2+i)^3} + (1+i)^8 - 7i = \dfrac{125(2-i)^3}{(2+i)^3(2-i)^3} + (1+i)^8 - 7i = (2-i)^3 + (1+i)^8 - 7i =$

$= (3-4i)(2-i) + (1+i)^2(1+i)^2(1+i)^2(1+i)^2 - 7i = (2-18i) + (2i)^4 = (2-18i) + 16$

$= 18(1-i)$

e) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^3\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3 = \left((-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})\right)^3 = \left(1-3i^2\right)^3 = 64$

8. Načrtněte v Gaußovské rovině následující množiny komplexních čísel:

a) $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| - \overline{z} = 1 + 2i\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-1+i| = |z-3-5i|\}$

c) $\left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re\mathbf{e}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leq 2\right\}$

d) $\left\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \leq 1\,,\ \left|z - \dfrac{1}{2}\right| \geq \dfrac{1}{2}\right\}$

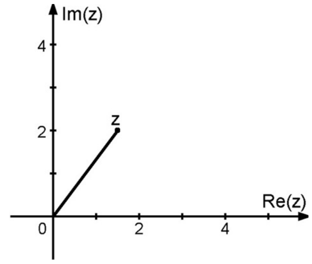
e) $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-1-i| = 2|z+1+i|\}$

f) $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| > 1 - \Re\mathbf{e}(z)\}$.

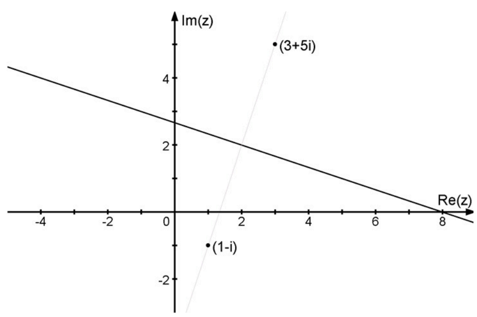
zu (a) $|z| - \overline{z} = 1 + 2i$ mit $z = a + bi \Rightarrow |z| - (a - bi) = 1 + 2i \Leftrightarrow |z| - a - 1 = (2 - b)i$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn gilt: $|z| - a - 1 = 0$ und $2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$

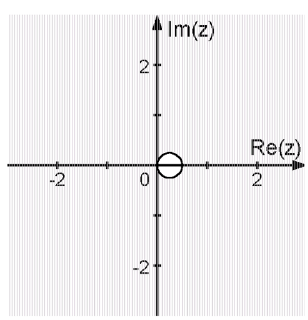
$\Rightarrow (a + 1)^2 = a^2 + 4 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2} \Rightarrow z = \dfrac{3}{2} + 2i$



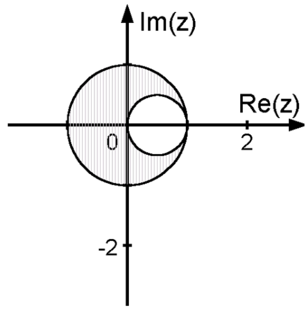
zu (b) Sei $z = a + bi \Rightarrow |z - 1 + i| = |z - 3 - 5i| \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 1)^2 = (a - 3)^2 + (b - 5)^2 \Leftrightarrow$
$4a - 32 = 12 \Rightarrow$ Das bedeutet, dass genau die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ die obige Gleichung erfüllen, die auf der Geraden M mit der Geradengleichung $b = -\dfrac{1}{3}a + \dfrac{8}{3}$ liegen. M ist die Mittelsenkrecht zwischen den Punkten $1 - i$ und $3 + 5i$.



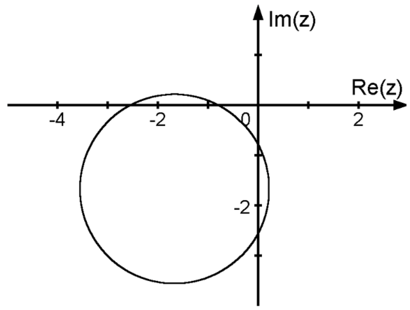
zu (c) Sei $z = a + bi \Rightarrow \mathfrak{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leq 2 \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\left(\dfrac{1}{a + bi}\right) \leq 2 \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\left(\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}\right) \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{a^2 + b^2} \leq 2 \Leftrightarrow$
$0 \leq a^2 - \dfrac{1}{2}a + b^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{16} \leq \left(a - \dfrac{1}{4}\right)^2 + b^2.$



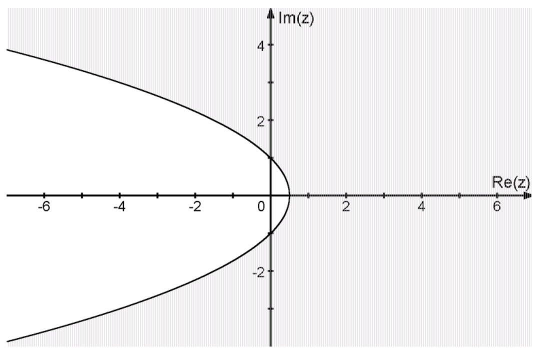
zu (d)



zu (e) Sei $z = a + bi \Rightarrow |z - 1 - i| = 2|z + 1 + i| \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 4\left((a+1)^2 + (b+1)^2\right) \Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + \frac{10}{3}a + \frac{10}{3}b + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$.



zu (f) Sei $z = a + bi \Rightarrow |z| > 1 - \Re\mathbf{e}(z) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} > 1 - a \Leftrightarrow b^2 > 1 - 2a$.



9. Dokažte, že pro všechna komplexní čísla $z, w \in \mathbb{C}$ platí tak zvaná rovnoběžníková identita

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Jaká geometrická věta se za ní skrývá?

Mit $z = a + bi$ und $w = c + di$ folgt:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (a+c)^2 + (b+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \\ &= 2(a^2 + b^2) + 2(c^2 + d^2) = 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$

Die geometrische Aussage des Satzes lautet:

Die Quadrate der Längen der Diagonalen eines Parallelogramms entsprechen dem Doppelten der Quadrate der beiden Seitenlängen.

10. Převeďte následující výrazy na trigonometrický tvar $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:
a) $(1 + \sqrt{3}i)(1 + i)(\cos a + i\sin a), \quad a \in \mathbb{R}$ b) -5 c) $i + \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha), \quad 0 \le \alpha < \pi$

zu a)

$$\underbrace{(1+\sqrt{3}i)}_{z}\underbrace{(1+i)}_{w}(\cos a + i\sin a) \Rightarrow \quad \arg(z) = \frac{1}{3}\pi \quad |z| = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi)$$

$$\Rightarrow \quad \arg(w) = \frac{1}{4}\pi \quad |w| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad w = \sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi)$$

$\Rightarrow (1 + \sqrt{3}i)(1 + i)(\cos a + i\sin a) = 2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi)\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi)(\cos a + i\sin a)$

$$= 2\sqrt{2}(\cos(\tfrac{7}{12}\pi + a) + i\sin(\tfrac{7}{12}\pi + a))$$

zu b) $-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$

zu c) $i+\sin(2\alpha)-i\cos(2\alpha) = \sin(2\alpha)+i(1-\cos(2\alpha)) = 2\sin\alpha\cos\alpha+i(2\sin^2\alpha) = 2\sin\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

11. Řešte rovnice pro $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$:

a) $z^3 = i$	b) $z^6 = -27$	c) $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$	d) $z^2 + 2 = 0$
e) $z^2 + 2z + (1 - 8i) = 0$	f) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$	g) $z^2 = 3 + 4i$	h) $z^2 = 5 - 12i$

Bemerkung: Es gibt mehrere Arten die komplexe Gleichung $z^2 = a + bi$ zu lösen.

Zunächst kann dies unter Zuhilfenahme der Formel von *Moivre* geschehen.
Sei $z^2 = a + bi$. Man bestimme $\varphi = \arg(z)$ und $r = |z|$, dann gilt:

$$z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right)\right) \qquad \text{und} \qquad z_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\tfrac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi}{2} + \pi\right)\right)$$

Man kann aber auch so vorgehen:

Sei $z^2 = a + bi$ und $z = x + yi$.

Falls $b = 0$ ist, so gilt offenbar:

$$z_{1/2} = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & \text{falls } a \geq 0 \\ \pm i\sqrt{|a|} & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Falls jedoch $b \neq 0$ ist, so gilt

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi,$$

was auf die zwei reellen Gleichungen

$$\text{(I) } a = x^2 - y^2 \qquad \text{und} \qquad \text{(II) } b = 2xy \qquad \text{führt.}$$

Da $b \neq 0$ vorausgesetzt ist, folgt aus (II) direkt: $x \neq 0$ und $y \neq 0$.
Weiter gewinnt man aus (I) durch Einsetzen von (II) zunächst:

$$\text{die reellen Gleichungen} \qquad x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a \qquad \text{und umgeformt} \qquad x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$$

woraus nach der $p-q-$Formel:

$$(x^2)_{1/2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

folgt, was durch das das plus unter der Wurzel immer einen sinnvollen Ausdruck.
Man überlegt sich ferner, dass stets gilt:

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} > 0,$$

woraus sich

$$(x)_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und durch (II) auch } y_{1/2} \text{ bestimmen lässt.}$$

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass auch die $p-q-$Formel in $\mathbb{C}$ gilt.

zu a) $\quad z^3 = i \quad \Rightarrow \quad |z^3| = 1 \quad \arg(z^3) = \frac{1}{2}\pi \quad \Rightarrow z^3 = (\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi) \overset{Moivre}{\Longrightarrow}$

$z_1 = (\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad z_2 = (\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad z_3 = (\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi) = -i$

zu b) $\quad z^6 = -27 \quad \Rightarrow \quad |z^6| = 27 \quad \arg(z^6) = \pi \quad \Rightarrow z^3 = (\cos\pi + i\sin\pi) \overset{Moivre}{\Longrightarrow}$

$$\begin{array}{ll} z_1 = \sqrt{3}(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{3}i \\ z_3 = \sqrt{3}(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & z_4 = \sqrt{3}(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_5 = \sqrt{3}(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi) = -\sqrt{3}i & z_6 = \sqrt{3}(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}$$

zu c) $z^4 = 1 + i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |z^4| = 2 \quad \arg(z^4) = \frac{1}{3}\pi \quad \Rightarrow z^3 = 2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi) \overset{Moivre}{\Longrightarrow}$

$$\begin{array}{ll} z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{1}{12}\pi + i\sin\frac{1}{12}\pi) & z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi) \\ z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi) & z_4 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi) \end{array}$$

zu d) $z^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1/2} = \pm i\sqrt{2}$

zu e) $z^2 + 2z + (1 - 8i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)^2 = 8i \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)_{1/2} = \pm 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm(2 + 2i)$

$$\Rightarrow z_1 = 1 + 2i \qquad \text{und} \qquad z_1 = -3 - 2i$$

zu f) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2 - 1)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 1 \pm i$

1. Fall: $z^2 = 1 + i \quad \overset{Moivre}{\Longrightarrow} \quad z_{1/2} = \pm\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$

2. Fall: $z^2 = 1 - i \quad \overset{Moivre}{\Longrightarrow} \quad z_{3/4} = \pm\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8})$

zu g) $z^2 = 3 + 4i$ ergibt gemäss der Bemerkung mit $a = 3$ und $b = 4 \quad z_1 = 2 + i$ und $z_2 = -2 - i$

zu h) $z^2 = 5 - 12i$ ergibt gemäss der Bemerkung mit $a = 5$ und $b = -12 \quad z_1 = 3 - 2i$ und $z_2 = -3 + 2i$

12. Spočtěte přesnou hodnotu $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\sin\frac{\pi}{5}$.

Návod: Položte $z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ a použijte $z^5 + 1 = 0$ stejně jako $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{5}$.

Sei also $z = (\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$.

$$z^5 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{(z+1)}_{\neq 0}(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \ (\star)$$

$$n := z + \frac{1}{z} \qquad \Rightarrow \qquad n^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$$

$$(\star) \qquad \Leftrightarrow \qquad n^2 - n - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \qquad n_1 = z + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}}$$

13. Načtrněte v $\mathbb{C}$ následující množiny

$$\text{a) } \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 3\}, \quad \text{b) } \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - 1|\}, \quad \text{c) } \{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 1| = |z^2 - 1|\},$$
$$\text{d) } \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = 2|z - 2|\}, \quad \text{e) } \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z + 2) \geq \mathrm{Im} z\}.$$

Zu a)

Der Abstand zwischen z und i soll 3 sein. Es handelt sich also um Kreis mit Mittelpunkt i und Radius 3.

Zu b)

Der Abstand von z zu $-i$ muss gleich dem Abstand von z zu 1 sein. Es handelt sich also um die Achse der Ve rbindungsgerade zw. $-i$ und 1, also die Achse des zweiten und vierten Quadrants.

Zu c)

Erstmal finden wir (wie in b) die Menge $\tilde{M} = \{w \in \mathbb{C} : |w + 1| = |w - 1|\}$. Dies ist die imaginäre Achse. Dann suchen wir die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \in \tilde{M}\}$. Aus der geometrischen Intepretation der Multiplikation komplexer Zahlen folgt, dass $M = \{(1 + i)t : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(1 - i)t : t \in \mathbb{R}\}$.

Zu d)

Der Abstand zw. z und -1 ist doppel so groß als der Abstand zw. z und 2. In der Menge liegen also die Punkte 1 und 5. Aus der Elementargeometrie folgt, dass die Menge so-gennanter Apollonischer Kreis ist, d.h. Kreis mit Mittelpunkt 3 und Radius 2.

Zu e)

Die Ungleichung erfüllen alle Punkte $z = a + ib$ mit $a + 2 \geq b$, d.h. eine Halbebene. Ihrer Rand ist eine Gerade, die durch die Punkte -2 und $2i$ geht.

14. Udejte trigonometrickou reprezentaci čísel

$$\text{a) } \frac{1 + i}{2}, \quad \text{b) } \left(\frac{1 + i}{2}\right)^2, \quad \text{c) } \left(\frac{1 + i}{2}\right)^{30}, \quad \text{d) } \frac{(1 + \sqrt{3}i)^{15}}{(\sqrt{3} + i)^{24}}.$$

Najděte reálnou a imaginární část a absolutní hodnotu

$$\text{e) } \frac{1 + i}{1 - i}, \quad \text{f) } \frac{1}{i}, \quad \text{g) } \frac{i + \frac{1}{1+i}}{i + \frac{1}{1-i}}.$$

Zu a)

$$\left|\frac{1 + i}{2}\right| = \frac{|1 + i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Also ist

$$\frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Zu b) und c)

Aus der Formel

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

folgt

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{i}{2}.$$

und

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{30} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}(\cos 30\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 30\cdot\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2^{15}}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -\frac{i}{32768}.$$

Zu d)

$$(1+\sqrt{3}i)^{15} = |1+\sqrt{3}i|^{15}(\cos 15\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 15\cdot\frac{\pi}{3}) = 2^{15}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 2^{15}(\cos\pi + i\sin\pi).$$

$$(\sqrt{3}+i)^{24} = |\sqrt{3}+i|^{24}(\cos 24\frac{\pi}{6} + i\sin 24\frac{\pi}{6}) = 2^{24}(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 2^{24}.$$

Also

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^{15}}{(\sqrt{3}+i)^{24}} = \frac{-2^{15}}{2^{24}} = -2^{-9}.$$

Zu e)

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

Also

$$Re(z) = 0, Im(z) = 1, |z| = 1.$$

Zu f)

$$z = \frac{1}{i} = \frac{1\cdot i}{i\cdot i} = \frac{i}{-1} = -i,$$

also

$$Re(z) = 0, Im(z) = -1, |z| = 1.$$

Zu g)

$$z = \frac{i+\frac{1}{1+i}}{i+\frac{1}{1-i}} = \frac{i+\frac{1-i}{2}}{i+\frac{1+i}{2}} = \frac{2i+1-i}{2i+1+i} = \frac{1+i}{1+3i} = \frac{(1+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-2i}{10} = \frac{2-i}{5},$$

also

$$Re(z) = \frac{2}{5}, Im(z) = -\frac{1}{5}, |z| = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

15. Budiž z_1, z_2, z_3 komplexní čísla s vlastnostmi

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$

a

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

Ukažte, že z_1, z_2, z_3 jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.
Návod: Použijte

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

zz:

$$\begin{array}{ccc} |z_1 - z_2|^2 & = & |z_1 - z_3|^2 \\ \parallel & & \parallel \\ 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 + z_2|^2 & & 3 \\ \parallel & & \\ 2 \cdot 2 - |-z_3|^2 & & \\ \parallel & & \\ 4 - 1 & = & 3 \end{array}$$